Leonhard Euler

vollständige

Anleitung

zur

Algebra.

Erster Theil

von den

verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen.

Mit Röm. Kayserl. und Churfürstl. Sächß. allergnädigsten Privilegiis.

St. Petersburg 1771.

bey der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften.

M. 108
KGL. GYMNASIALBIBLIOTHEK LANDSHUT.

136159842
Staatl. Bibliothek Passau

Vorbericht.

Man überliefert hiermit denen Liebhabern der höhern Rechenkunst ein Werk, davon schon vor zwey Jahren eine russische Uebersetzung zum Vorschein gekommen ist.

Die Absicht des weltberühmten Verfassers bey demselben war, ein Lehrbuch zu verfertigen, aus welchem ein jeder ohne einige Beyhülfe die Algebra leicht fassen und gründlich erlernen könne.

Der Verlust seines Gesichtes erweckte in ihm diesen Gedanken, und durch seinen stets geschäfftigen Geist angetrieben, säumete er nicht seinen Vorsatz ins Werk zu setzen. Zu diesem Ende erwählete er sich einen jungen Menschen, den er mit sich aus Berlin zur Aufwartung genommen hatte, und der ziemlich fertig rechnen, sonst aber nicht den geringsten Begriff von der Mathematik hatte: er war seines Handwerks ein Schneider, und gehörete, was seine Fähigkeit anlanget, unter die mittelmäßigen Köpfe. Dem ohngeachtet hat er nicht nur alles wohl begriffen, was ihm sein großer Lehrer vorsagete, und zu schreiben befahl, sondern er wurde dadurch in kurzer Zeit in den Stand gesetzet,

die in der Folge vorkommende schwere Buchstaben-Rechnungen ganz allein auszuführen und alle ihm vorgelegte algebraische Aufgaben mit vieler Fertigkeit aufzulösen.

Dieses preiset um so viel mehr den Vortrag und die Lehrart des gegenwärtigen Werks an; da der Lehrling der es geschrieben, begriffen und ausgeführet, sonst nicht die geringste Hülfe von irgend einem andern als seinem zwar berühmten, aber des Gesichts beraubten Lehrers, genossen.

Außer diesem für sich schon großen Vorzug werden die Kenner besonders die Lehre von den Logarithmen und ihre Verbindung mit den übrigen Rechnungsarten, so wie auch die für die Auflösung der cubischen und biqua-

dratischen Gleichungen gegebenen Methoden mit Vergnügen lesen und bewundern. Die Liebhaber der diophanteischen Aufgaben aber werden sich über den letzten Abschnitt des zweyten Theils freuen, in welchem diese Aufgaben in einem angenehmen Zusammenhange vorgetragen, und alle zu ihrer Auflösung erforderliche Kunstgriffe erkläret worden sind.

Inhalt des ganzen Werks.

Erster Theil.

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit einfachen Größen.

Cap. 1. Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt. S. 3

Cap. 2. Erklärung der Zeichen + plus und − minus. S. 6

Cap. 3. Von der Multiplication mit einfachen Größen. S. 11

Cap. 4. Von der Natur der ganzen Zahlen in Absicht auf ihre Factoren. S. 16

Cap. 5. Von der Division mit einfachen Größen. S. 19

Cap. 6. Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler. S. 24

Cap. 7. Von den Brüchen überhaupt. S. 28

Cap. 8. Von den Eigenschaften der Brüche. S. 35

Cap. 9. Von der Addition und Subtraction der Brüche. S. 39

Cap. 10. Von der Multiplication und Division der Brüche. S. 42

Cap. 11. Von den Quadratzahlen. S. 48

Cap. 12. Von den Quadratwurzeln und den daher entspringenden Irrationalzahlen. S. 32

Cap. 13. Von den aus eben dieser Quelle entspringenden unmöglichen oder imaginären Zahlen. S. 59
Cap. 14. Von den Cubiczahlen. S. 63
Cap. 15. Von den Cubicwurzeln, und den daher entspringenden Irrationalzahlen. S. 66
Cap. 16. Von den Potestäten, oder Potenzen, überhaupt. S. 69
Cap. 17. Von den Rechnungsarten mit den Potestäten. S. 75
Cap. 18. Von den Wurzeln in Absicht auf alle Potestäten. S. 78
Cap. 19. Von der Ausdrückung der Irrationalzahlen durch gebrochene Exponenten. S. 81
Cap. 20. Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung überhaupt. S. 86
Cap. 21. Von den Logarithmen überhaupt. S. 91
Cap. 22. Von den üblichen logarithmischen Tabellen. S. 96
Cap. 23. Von der Art die Logarithmen vorzustellen. S. 100

Zweyter Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Cap. 1. Von der Addition mit zusammengesetzten Größen S. 109
Cap. 2. Von der Subtraction mit zusammengesetzten Größen. S. 112
Cap. 3. Von der Multiplication mit zusammengesetzten Größen. S. 115
Cap. 4. Von der Division mit zusammengesetzten Größen. S. 121
Cap. 5. Von der Auflösung der Brüche in unendlichen Reihen. S. 126

Cap. 6. Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen. S. 137
Cap. 7. Von der Ausziehung der Quadratwurzel in zusammengesetzten Größen. S. 141
Cap. 8. Von der Rechnung mit Irrationalzahlen. S. 147
Cap. 9. Von den Cubis und von der Ausziehung der Cubicwurzel. S. 151
Cap. 10. Von den höhern Potestäten zusammengesetzter Größen. S. 154
Cap. 11. Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweis der vorigen Regel, wie eine jegliche Potestät von einer zusammengesetzten Größe leicht gefunden werden soll, beruhet. S. 161
Cap. 12. Von der Entwickelung der irrationalen Potestäten durch unendliche Reihen. S. 166
Cap. 13. Von der Entwickelung der negativen Potestäten durch unendliche Reihen. S. 170

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Cap. 1. Von der arithmetischen Verhältniß, oder dem Unterschiede zwischen zweyen Zahlen. S. 177
Cap. 2. Von den arithmetischen Proportionen. S. 181
Cap. 3. Von den arithmetischen Progressionen. S. 184
Cap. 4. Von der Summation der arithmetischen Progressionen. S. 189
Cap. 5. Von den figurirten oder vieleckichten Zahlen. S. 195
Cap. 6. Von dem geometrischen Verhältnisse. S. 202
Cap. 7. Von dem größten gemeinen Theiler zweyer gegebenen Zahlen. S. 206
Cap. 8. Von den geometrischen Proportionen. S. 211

Cap. 9. Anmerkungen über die Proportionen und ihren Nutzen. S. 216
Cap. 10. Von den zusammengesetzten Verhältnissen. S. 223
Cap. 11. Von den geometrischen Progressionen. S. 229
Cap. 12. Von den unendlichen Decimalbrüchen. S. 238
Cap. 13. Von den Interesserechnungen. S. 245

Zweyter Theil.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Gleichungen und derselben Auflösung.

Cap. 1. Von der Auflösung der Aufgaben überhaupt. S. 3
Cap. 2. Von den Gleichungen des ersten Grades und ihrer Auflösung. S. 8
Cap. 3. Auflösung einiger hieher gehörigen Fragen. S. 13
Cap. 4. Von Auflösung zweyer und mehr Gleichungen vom ersten Grade. S. 26
Cap. 5. Von der Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen. S. 40
Cap. 6. Von der Auflösung der vermischten quadratischen Gleichungen. S. 48
Cap. 7. Von der Ausziehung der Wurzeln aus den vieleckichten Zahlen. S. 60
Cap. 8. Von der Ausziehung der Quadratwurzeln aus Binomien. S. 67
Cap. 9. Von der Natur der quadratischen Gleichungen. S. 79

Cap. 10. Von der Auflösung der reinen cubischen Gleichungen. S. 87
Cap. 11. Von der Auflösung der vollständigen cubischen Gleichungen. S. 93
Cap. 12. Von der Regel des Cardani oder des Scipionis Ferrei. S. 106
Cap. 13. Von der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, welche auch biquadratische Gleichungen genennet werden. S. 115
Cap. 14. Von des Pombelli Regel die Auflösung der biquadratischen Gleichungen auf cubische zu bringen. S. 124
Cap. 15. Von einer neuen Auflösung der biquadratischen Gleichungen. S. 130
Cap. 16. Von der Auflösung der Gleichungen durch die Näherung. S. 138

Zweyter Abschnitt.

Von der unbestimmten Analytic.

Cap. 1. Von der Auflösung der einfachen Gleichungen, worinnen mehr als eine unbekannte Zahl vorkömmt. S. 153
Cap. 2. Von der sogenannten Regulacöci, wo aus zwey Gleichungen drey oder mehr unbekannte Zahlen bestimmt werden sollen. S. 171
Cap. 3. Von den zusammengesetzten unbestimmten Gleichungen, wo von der einen unbekannten Zahl nur die erste Potestät vorkömmt. S. 178
Cap. 4. Von der Art diese irrationale Formeln $\surd(a + bx + cxx)$ rational zu machen. S. 183
Cap. 5. Von den Fällen, da die Formel $a + bx + cxx$ niemals ein Quadrat werden kann. S. 202

Cap. 6. Von den Fällen in ganzen Zahlen, da die Formel $axx + b$ ein Quadrat wird. S. 213

Cap. 7. Von einer besondern Methode die Formel $ann + 1$ zu einem Quadrat in ganzen Zahlen zu machen. S. 226

Cap. 8. Von der Art diese Irrationalformel $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3)}$ rational zu machen. S. 239

Cap. 9. Von der Art diese Irrationalformel $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}$ rational zu machen. S. 250

Cap. 10. Von der Art diese Irrationalformel $\sqrt[3]{(a + bx + cxx + dx^3)}$ rational zu machen. S. 264

Cap. 11. Von der Auflösung dieser Formel $axx + bxy + cyy$ in Factoren. S. 275

Cap. 12. Von der Verwandelung dieser Formel $axx + cyy$ in Quadraten, oder auch höheren Potestäten. S. 288

Cap. 13. Von einigen Formeln dieser Art, $ax^4 + by^4$, welche sich nicht zu einem Quadrat machen lassen. S. 302

Cap. 14. Auflösung einiger Fragen, die zu diesem Theile der Analytic gehören. S. 315

Cap. 15. Auflösung solcher Fragen, worzu Cubi erfordert werden. S. 366

Des
Ersten Theils
Erster Abschnitt.
Von
den verschiedenen Rechnungsarten
mit einfachen Größen.

Des

Ersten Theils

Erster Abschnitt.

Von den verschiedenen Rechnungs-arten mit einfachen Größen.

Capitel I.

Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt.

1.

Erstlich wird alles dasjenige eine Größe genannt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon wegnehmen läßt.

Diesemnach ist eine Summe Geldes eine Größe, weil sich dazu setzen und hinweg nehmen läßt.

Imgleichen ist auch ein Gewicht eine Größe und dergleichen mehr.

2.

Es giebt also sehr viel verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl herzählen lassen; und daher entstehen die verschiedenen Theile der Mathematic, deren ein jeglicher mit einer besondern Art von Größen beschäfftiget ist, indem die Mathematic überhaupt nichts anders ist als eine Wissenschaft der Größen, und welche Mittel ausfündig macht, wie man dieselbe ausmessen soll.

3.

Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmessen, als daß man eine Größe von eben derselben Art als bekannt annimmt, und das Verhältniß anzeiget, worinnen eine jegliche Größe, von eben der Art, gegen derselben steht.

Also, wenn die Größe einer Summe Geldes bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Stück Geld, als z. E. ein Gulden, ein Rubel, ein Thaler, oder ein Ducaten und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt, wie viel dergleichen Stücke in gemeldeter Summe Geldes enthalten sind.

Eben so, wenn die Größe eines Gewichts bestimmt werden soll, so wird ein gewisses Gewicht, als z. E. ein Pfund, ein Centner, oder ein Loth und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt, wie viel derselben in dem vorigen Gewicht enthalten sind.

Soll aber eine Länge oder eine Weite ausgemessen werden, so pfleget man sich darzu einer gewissen bekannten Länge, welche ein Fuß genennet wird, zu bedienen.

4.

Bey Bestimmungen, oder Ausmessungen der Größen von allen Arten, kömmt es also darauf an, daß erstlich eine gewisse bekannte Größe von gleicher Art fest

fest gesetzet werde (welche das Maaß, oder die Einheit, genennet wird), und also von unserer Willkühr lediglich abhängt; hernach, daß man bestimme, in was für einem Verhältnisse die vorgegebene Größe gegen dieses Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß eine Zahl nichts anders ist als das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht.

5.

Hieraus ist klar, daß sich alle Größen, durch Zahlen ausdrücken lassen, und also der Grund aller mathematischen Wissenschaften darinn gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Rechnungsarten, so dabey vorkommen können, genau in Erwägung ziehe, und vollständig abhandele.

Dieser Grundtheil der Mathematic wird, die Analytic oder Algebra genennet.

6.

In der Analytic werden also bloß allein Zahlen betrachtet, wodurch die Größen angezeiget werden, ohne sich um die besondere Art der Größen zu bekümmern, als welches in den übrigen Theilen der Mathematic geschieht.

7.

Von den Zahlen insbesondere handelt die Arithmetic oder Rechenkunst, allein dieselbe erstreckt sich nur auf gewisse Rechnungsarten, welche im gemeinen Leben öfters vorkommen; hingegen begreift die Analytic auf eine allgemeine Art alles dasjenige in sich, was bey den Zahlen und derselben Berechnung auch immer vorfallen mag.

Capitel 2.

Erklärung der Zeichen + plus und – minus.

8.

Wenn zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addirt werden soll, so wird solches durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und plus ausgesprochen wird.

Also wird durch 5 + 3 angedeutet, daß zu der Zahl 5 noch 3 addirt werden sollen, da man denn weiß, daß 8 heraus komme; eben so z. E. 12 + 7 ist 19; 25 + 16 ist 41, und 25 + 41 ist 66 ꝛc.

9.

Durch dieses Zeichen + plus pflegen auch mehrere Zahlen verbunden zu werden, als z. E.

7 + 5 + 9, wodurch angezeigt wird, daß zu der Zahl 7 noch 5, und über dieses noch 9 addirt werden sollen, welches 21 ausmacht. Hieraus versteht man was nachstehende Formel bedeutet, als:

$$8 + 5 + 13 + 11 + 1 + 3 + 10,$$

nämlich die Summe aller dieser Zahlen, welche beträgt 51.

10.

Wie dieses für sich klar ist, so ist noch zu merken, daß auf eine allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, als a, b, c, d, ꝛc. angedeutet werden, wenn man also schreibt $a + b$, so bedeutet dieses die Summe der beyden Zahlen, welche durch a und b ausgedrückt werden, dieselben mögen nun so groß oder klein seyn, als sie wollen. Eben so bedeutet $f + m + b + x$ die Summe der Zahlen, welche durch diese Buchstaben ausgedrückt werden.

In einem jeglichen Falle also, wenn man nur weiß, was für Zahlen durch solche Buchstaben angedeutet werden, findet man durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth dergleichen Formeln.

11.

Wenn hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen − minus angedeutet, welches so viel als weniger ist, und derselben Zahl, welche weggenommen wird, vorgesetzt wird:

Also bedeutet 8 − 5,

daß von der Zahl 8 die Zahl 5 soll weggenommen werden, da denn, wie bekannt ist, 3 übrig bleibt. Eben so ist 12 − 7, so viel als 5, und 20 − 14, so viel als 6, ꝛc.

12.

Es kann auch geschehen, daß von einer Zahl mehr Zahlen sollen zugleich subtrahirt werden.

als z. E. 50 − 1 − 3 − 5 − 7 − 9.

Welches also zu verstehen ist: nimmt man zuerst 1 von 50 weg, bleiben 49; davon 3 weggenommen, bleiben 46; davon 5, bleiben 41; davon 7 weg, bleibleiben 34; davon die letzten 9 weggenommen, bleiben 25; welches der Werth der vorgegebenen Formel ist. Aber da die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, insgesammt weggenommen werden sollen, so ist es eben so viel, als wenn man ihre Summe nämlich 25 auf einmal von 50 abzieht, da denn, wie vorher, 25 übrig bleiben.

13.

Eben so läßt sich auch leicht der Werth solcher Formeln bestimmen, in welchen beyde Zeichen + plus und − minus vorkommen; als z. E.

12 − 3 − 5 + 2 − 1 ist so viel als 5.

Oder man darf nur die Summe derer Zahlen die + vor sich haben, besonders nehmen, als:

12 + 2 machen 14, und davon die Summe aller Zahlen die − vor sich haben, welche sind 3, 5, 1,

das ist 9 abziehen, da denn, wie vorher gefunden wird 5.

14.

Hieraus ist klar, daß es hierbey gar nicht auf die Ordnung der hergesetzten Zahlen ankomme, sondern daß man dieselben nach Belieben versetzen könne, wenn nur eine jede das ihr vorstehende Zeichen behält; also, anstatt der obigen Formel kann man setzen,

$$12 + 2 - 5 - 3 - 1, \text{ oder } 2 - 1 - 3 - 5 + 12,$$
$$\text{oder } 2 + 12 - 3 - 1 - 5;$$

wobey aber zu merken, daß in obiger Formel vor der Zahl 12 das Zeichen + vorgesetzt verstanden werden muß.

15.

Wenn nun die Sache allgemein zu machen, anstatt der wirklichen Zahlen, Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung davon, als z. E.

$a - b - c + d - e$ deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedrückte Zahlen hergelegt werden, und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen − haben insgesammt weggenommen werden müssen.

16.

Hier kömmt also die Hauptsache darauf an, was für ein Zeichen eine jegliche Zahl vor sich stehen hat; daher pfleget man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen, als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen, welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive Größen zu nennen;

diejenigen aber, welche das Zeichen – vor sich haben, werden verneinende oder negative Größen genennet.

17.

Dieses läßt sich schön durch die Art erläutern, wie das Vermögen einer Person pflegt angezeigt zu werden; da dasjenige, was sie wirklich besitzt, durch positive Zahlen mit dem Zeichen + plus, dasjenige aber was sie schuldig ist, durch negative Zahlen mit dem Zeichen – minus ausgedruckt wird. Also wann jemand 100 Rubel hat, dabey aber 50 schuldig ist, so wird sein Vermögen seyn

100 – 50. oder welches einerley,
+ 100 – 50. das ist 50.

18.

Da nun die negative Zahlen als Schulden betrachtet werden können, in so fern die positive Zahlen die wirkliche Besitzungen anzeigen, so kann man sagen, daß die negative Zahlen weniger sind als nichts; also wenn einer nichts im Vermögen hat, und noch darzu 50. Rub. schuldig ist, so hat er wirklich 50. Rub. weniger als nichts; dann wann ihm jemand 50. Rub. schenken sollte, um seine Schulden zu bezahlen, so würde er alsdann erst nichts haben, da er doch jetzt mehr hatte als vorher.

19.

Wie nun die positive Zahlen ohnstreitig größer als nichts, so sind die negative Zahlen kleiner als nichts. Die positive Zahlen aber entstehen, wann man erstlich zu 0, oder nichts, immerfort eines zusetzt, da dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen entspringt, nämlich.

0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9, +10,

und so fort ins unendliche.

Wird aber diese Reihe rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entspringt folgende Reihe der negativen Zahlen

$$0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10,$$

und so fort ohne Ende.

20.

Alle diese Zahlen, so wohl positive als negative, führen den bekannten Namen der ganzen Zahlen, welche also entweder größer oder kleiner sind als nichts. Man nennt dieselbe ganze Zahlen, um sie von den gebrochenen, und noch vielerley andern Zahlen, wovon unten gehandelt werden wird, zu unterscheiden. Dann da zum Exempel 50 um ein ganzes größer ist als 49, so begreift man leicht, daß, zwischen 49 und 50 noch unendlich viel Mittelzahlen statt finden können, welche alle größer als 49, und doch alle kleiner als 50 sind. Man darf sich zu diesem Ende nur 2 Linien vorstellen, deren eine 50 Fuß, die andere aber 49 Fuß lang ist, so wird man leicht begreifen, daß man unendlich viel andere Linien ziehen kann, welche alle länger als 49 und doch kürzer als 50 Fuß sind.

21.

Dieser Begriff von den verneinenden oder negativen Größen ist um so viel sorgfältiger zu bemerken, da derselbe in der ganzen Algebra von der größten Wichtigkeit ist. Hier wird genung seyn zum voraus zu bemerken, daß diese Formel, z. E.

$$+1-1, +2-2, +3-3, +4-4, \text{ u. s. f.}$$

alle so viel sind als 0, oder nichts: ferner, daß z. E. $+2-5$ so viel ist als -3, weil, wenn einer 2 Rubl. hat, und 5 Rubl. schuldig ist, so hat er nicht nur nichts, sondern bleibt noch 3 Rubl. schuldig: eben so ist,

$$7 - 12 \text{ so viel als } -5$$
$$25 - 40 \text{ so viel als } -15$$

22.

22.

Eben dieses ist auch zu beobachten, wenn auf eine allgemeine Art anstatt der Zahlen Buchstaben gebraucht werden, da denn immer + a − a, so viel ist als o, oder nichts. Hernach wenn man wissen will, was z. E. + a − b bedeute, so sind zwey Fälle zu erwägen.

Der 1ste ist, wenn a größer als b, da subtrahiret man b von a, und der Rest positiv genommen, ist der gesuchte Werth.

Der 2te ist, wenn a kleiner als b, da subtrahiret man a von b, und der Rest negativ genommen, oder das Zeichen minus − vorgesetzt, zeigt den gesuchten Werth an.

Capitel 3.

Von der Multiplication mit einfachen Größen.

23.

Wenn zwey, oder mehr gleiche Zahlen zusammen addirt werden, so läßt sich die Summe auf eine kürzere Art ausdrücken, also ist;

a + a so viel als 2. a, und
a + a + a „ „ „ 3. a, ferner
a + a + a + a „ „ 4. a, und so weiter.

Woraus der Begriff von der Multiplication entspringt, nämlich da

2. a so viel ist, als 2 mal a, und
3. a so viel als 3 mal a, ferner
4. a so viel als 4 mal a, u. s. fort.

24.

Wenn also eine durch einen Buchstaben ausgedruckte Zahl mit einer beliebigen Zahl multipliciret werden soll, so wird die Zahl bloß vor den Buchstaben geschrieben; also,

a mit 20 mult. giebt 20 a, und
b mit 30 mult. giebt 30 b, ꝛc.

Solchergestalt ist ein c, einmal genommen, oder 1 c, so viel als c.

25.

Dergleichen Producte können auch noch weiter leicht mit andern Zahlen multipliciret werden, als z. E.

2 mal 3 a macht 6 a
3 mal 4 b macht 12 b
5 mal 7 x macht 35 x,

welche noch ferner mit Zahlen nach Belieben können multipliciret werden.

26.

Wenn die Zahl, mit welcher multipliciret werden soll, auch durch einen Buchstaben vorgestellt wird, so wird derselbe dem andern Buchstaben unmittelbar vorgesetzt; also wenn b mit a multipliciret werden soll, so heißt das Product a b, und p q ist das Product, welches entsteht, wenn man die Zahl q mit p multiplicirt. Will man p q noch ferner mit a multipliciren, so kömmt heraus a p q.

27.

Hiebey ist wohl zu merken, daß es auch hier nicht auf die Ordnung der an einander gesetzten Buchstaben ankomme, indem a b eben so viel ist als b a; oder b und a mit einander multiplicirt, macht eben so viel als a mit b multiplicirt. Um dieses zu begreifen, darf man nur für a und b bekannte Zahlen, als 3 und 4 nehmen,

nehmen, so giebt es sich von selbsten: nämlich 3 mal 4 ist eben so viel, als 4 mal 3.

28.

Wenn anstatt der Buchstaben, welche unmittelbar an einander geschrieben sind, wirkliche Zahlen sollen gesetzt werden, so sieht man leicht, daß dieselben alsdenn nicht unmittelbar hinter einander geschrieben werden können. Denn wenn man vor 3 mal 4 schreiben wollte 34, so würde solches nicht zwölf, sondern vier und dreyßig heißen. Wenn derowegen eine Multiplication mit bloßen Zahlen angedeutet werden soll, so pflegt man einen Punct zwischen dieselben zu setzen: also

3. 4, bedeutet 3 mal 4, das ist 12, eben so ist 1. 2. so viel als 2. und 1. 2. 3, ist 6. ferner 1. 2. 3. 4. 56, ist 1344. und 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. ist 3628800 u. s. f.

29.

Hieraus ergiebt sich nun auch, was eine solche Formul 5. 7. 8. a b c d, bedeute; nämlich 5 wird erstlich mit 7 multipliciret, das Product ferner mit 8, dieses Product hernach mit a, und dieses wieder mit b, sodann mit c, und endlich mit d multipliciret; wobey zu merken, daß anstatt 5. 7. 8, der Werth davon, nämlich die Zahl 5 mal 7, ist 35, und 8 mal 35 ist 280, geschrieben werden kann.

30.

Ferner ist zu merken, daß solche Formel, die aus der Multiplication mehrerer Zahlen entstehen, Producte genennt werden. Zahlen oder Buchstaben aber, welche einzeln sind, pflegt man Factores zu nennen.

31.

Bis hierher haben wir nur positive Zahlen betrachtet, und da ist gar kein Zweifel, daß die daher entstehenden

henden Producte nicht auch positive seyn sollten: nämlich $+a$ mit $+b$ multipliciret, giebt ohnstreitig $+ab$: was aber heraus komme, wenn $+a$ mit $-b$, oder $-a$ mit $-b$ multipliciret werde, erfordert eine besondere Erörterung.

32.

Wir wollen erstlich $-a$ mit 3 oder $+3$ multipliciren; weil nun $-a$ als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß wenn diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden müsse, folglich wird das gesuchte Product $-3a$ seyn. Eben so, wenn $-a$ mit b, das ist, $+b$ multiplicirt werden soll, so wird heraus kommen $-ba$, oder welches einerley $-ab$. Hieraus machen wir den Schluß, daß wenn eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde; woher diese Regel gemacht wird, $+$ mit $+$ giebt $+$ oder plus; hingegen $+$ mit $-$, oder $-$ mit $+$ multipliciret, giebt $-$ oder minus.

33.

Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nämlich, wenn $-$ mit $-$ multiplicirt wird, oder $-a$ mit $-b$. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, ab: ob aber das Zeichen $+$ oder $-$ dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß, so viel aber ist gewiß, daß es entweder das eine, oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen $-$ seyn? Denn $-a$ mit $+b$ mult. giebt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben, was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es muß das Gegentheil heraus kommen, welches nämlich heißt, $+ab$. Hieraus entsteht diese Regel, $-$ mit $-$ mult. giebt $+$ eben so wohl, als $+$ mit $+$.

34.

Diese Regeln pflegen zusammen gezogen und kürzlich mit diesen Worten ausgedruckt zu werden: Zwey gleiche Zeichen mit einander multipliciret, geben +, zwey ungleiche Zeichen aber geben −. Wenn also z. E. diese Zahlen,

+ a, − b, − c, + d, mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt erstlich + a mit − b, mult. − ab, dieses mit − c, giebt + abc, und dieses endlich mit + d, giebt + abcd.

35.

Da nun die Sache in Ansehung der Zeichen keine Schwierigkeit hat, so ist noch übrig zu zeigen, wie zwey Zahlen, die schon selbst Producte sind, mit einander multiplicirt werden sollen. Wenn die Zahl ab mit der Zahl cd multiplicirt werden soll, so ist das Product abcd, und entsteht also, wenn man erstlich ab mit c, und das, was man durch die Multiplication gefunden, ferner mit d multiplicirt. Oder also, wenn man z. E. die Zahl 36 mit 12 multipliciren soll: weil 12 ist 3 mal 4, so hat man nur nöthig 36, erstlich mit 3 zu multipliciren, und das gefundene, nämlich 108, ferner mit 4 zu multipliciren. Da man denn erhält: 432. welches so viel ist, als 12 mal 36.

36.

Wollte man aber 5ab mit 3cd multipliciren, so könnte man auch wohl setzen 3cd5ab: da es aber hier eben nicht auf die Ordnung derer mit einander multiplicirten Zahlen ankommt, so pflegt man die bloße Zahlen zuerst zu setzen, und schreibt für das Product 5.3abcd, oder 15abcd, weil 5 mal 3 so viel ist als 15.

Eben so, wenn 12pqr mit 7xy, multiplicirt werden sollte, so erhält man 12.7pqrxy, oder 84pqrxy.

Capitel

Capitel 4.

Von der Natur der ganzen Zahlen in Absicht auf ihre Factoren.

37.

Wir haben bemerkt, daß ein Product aus 2 oder mehr mit einander multiplicirten Zahlen entstehe. Diese Zahlen werden die Factores davon genennt.

Also sind die Factores des Products abcd die Zahlen a, b, c, d.

38.

Zieht man nun alle ganze Zahlen in Betrachtung, in so fern dieselben durch die Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen entstehen können, so wird man bald finden, daß einige gar nicht durch die Multiplication entspringen können, und also keine Factoren haben, andere aber aus 2 und auch mehr Zahlen mit einander mult. entstehen können, folglich 2 oder mehr Factores haben; also ist:

4 so viel als 2. 2, ferner 6 so viel als 2. 3, und 8 so viel als 2. 2. 2, ferner 27 so viel als 3. 3. 3, und 10 so viel als 2. 5, und so fort.

39.

Hingegen lassen sich die Zahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ꝛc. nicht solchergestalt durch Factores vorstellen, es wäre denn, daß man auch 1 zu Hülfe nehmen, und z. E. 2 durch 1. 2 vorstellen wollte. Allein, da mit 1 multiplicirt die Zahl nicht verändert wird, so wird 1 auch nicht unter die Factores gezählt.

Alle diese Zahlen nun, welche nicht durch Factores vorgestellt werden können, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ꝛc. werden einfache Zahlen, oder Primzahlen genennt; die übrigen Zahlen aber, welche sich durch Factores vorstellen lassen, als:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, ꝛc. heißen zusammengesetzte Zahlen.

40.

Die einfache oder Primzahlen verdienen also besonders wohl in Erwägung gezogen zu werden, weil dieselben aus keiner Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen mit einander entstehen können. Wobey insonderheit dieses merkwürdig ist, daß, wenn dieselben der Ordnung nach geschrieben werden, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, u. s. f. darinnen keine gewisse Ordnung wahrgenommen wird, sondern dieselben bald um mehr, bald um weniger fortspringen.

Und es hat auch bisher kein Gesetze, nach welchem dieselben fortgiengen, ausfindig gemacht werden können.

41.

Die zusammengesetzten Zahlen aber, welche sich durch Factores vorstellen lassen, entspringen alle aus den obigen Primzahlen, so, daß alle Factores davon Primzahlen sind. Denn wenn je ein Factor keine Primzahl, sondern schon zusammengesetzt wäre, so würde man denselben wieder durch 2 oder mehr Factores die Primzahlen wären, vorstellen können. Also, wenn die Zahl 30 durch 5. 6 vorgestellt wird, so ist 6 keine Primzahl, sondern 2. 3, und also kann 30 durch 5. 2. 3, oder durch 2. 3. 5, vorgestellt werden, wo alle Factores Primzahlen sind.

42.

Erwägt man nun alle zusammengesetzte Zahlen, wie solche durch Primzahlen vorgestellt werden können, so findet sich darinnen ein großer Unterschied, indem einige nur 2 dergleichen Factores haben, andere 3 oder mehr: also ist, wie wir schon gesehen,

4 so viel als 2. 2,	6 so viel als 2. 3,
8 . . . . 2. 2. 2,	9 . . . . . . 3. 3,
10 . . . . . 2. 5,	12 . . . . 2. 3. 2,
14 . . . . 2. 7,	15 . . . . 3. 5,
16 . . . 2. 2. 2. 2,	und so fort.

43.

Hieraus läßt sich begreifen, wie man von einer jeglichen Zahl ihre einfache Factores finden soll.

Also, wenn die Zahl 360 vorgegeben wäre, so hat man für dieselbe erstlich 2. 180.

Nun aber ist

180 so viel als	2. 90 und
90 so viel als	2. 45 und
45 so viel als	3. 15 und endlich
15 so viel als	3. 5.

Folglich wird die Zahl 360 durch folgende einfache Factores vorgestellt.

2. 2. 2. 3. 3. 5,

als welche Zahlen alle mit einander multiplicirt, die Zahl 360 vorbringen.

44.

Wir sehen also hieraus, daß sich die Primzahlen durch keine andere Zahlen theilen lassen, und hingegen die zusammengesetzten Zahlen am füglichsten in ihre einfache Factores aufgelöset werden, wenn man alle einfache Zahlen sucht, durch welche sich dieselben theilen lassen. Allein hiebey wird die Division gebraucht, von welcher in dem folgenden Capitel die Regeln erklärt werden sollen.

Capitel

Capitel 5.

Von der Division mit einfachen Größen.

45.

Wenn eine Zahl in 2, 3, oder mehr gleiche Theile zertheilt werden soll, so geschieht solches durch die Division, welche die Größe eines solchen Theils bestimmen lehret. Also, wenn die Zahl 12 in 3 gleiche Theile zertheilt werden soll, so findet man durch die Division, daß ein solcher Theil 4 sey.

Man bedienet sich aber dabey gewisser Namen. Die Zahl, die zertheilt werden soll, heißt das Dividend, oder die zu theilende Zahl: die Anzahl der Theile wird der Divisor, oder Theiler genennt. Die Größe eines solchen Theils aber, welcher durch die Division gefunden wird, pflegt der Quotus oder Quotient genennt zu werden: also ist dem angeführten Exempel nach

12 das Dividend, oder die zu theilende Zahl.
3 der Divisor, oder Theiler, und
4 der Quotus, oder Quotient.

46.

Wenn man also eine Zahl durch 2 theilt, oder in 2 gleiche Theile zerschneidet, so muß ein solcher Theil, das ist, der Quotus zweymal genommen, just die vorgegebene Zahl ausmachen; eben so, wenn eine Zahl durch 3 getheilt werden soll, so muß der Quotus 3 mal genommen dieselbe Zahl ausmachen; ja es muß überhaupt immer das Dividend heraus kommen, wenn man den Quotus und den Divisor mit einander multiplicirt.

47.

Dahero wird auch die Division also beschrieben, daß man für den Quotient eine solche Zahl suche, welche mit dem Divisor multiplicirt, just die zu theilende Zahl hervor bringe. Also, wenn zum Exempel 35 durch 5 getheilt werden soll, so sucht man eine Zahl, welche mit 5 multiplicirt, 35 heraus bringe. Diese Zahl ist demnach 7, weil 5 mal 7, 35 ausmacht. Man pflegt sich dabey dieser Redensart zu bedienen: 5 in 35 habe ich 7 mal; denn 5 mal 7 ist 35.

48.

Man stellt sich demnach das Dividend als ein Product vor, von welchem der eine Factor dem Divisor gleich ist, da denn der andere Factor den Quotienten anzeigt.

Wenn ich also 63 durch 7 dividiren soll, so suche ich ein Product, davon der eine Factor 7, und der andere also beschaffen ist, daß, wenn derselbe mit diese 7 multipliciret wird, genau 63 heraus kommen. Ein solches ist nun 7.9, und deswegen ist 9 der Quotus, welcher entspringt, wenn man 63 durch 7 dividirt.

49.

Wenn dahero auf eine allgemeine Art die Zahl ab durch a getheilt werden soll, so ist der Quotus offenbar b, weil a mit b multiplicirt, das Dividend ab ausmacht. Hieraus ist klar, daß, wenn man ab durch b dividiren soll, der Quotus a seyn werde.

Also überhaupt in allen Divisionsexempeln, wenn man das Dividend durch den Quotus dividirt, so muß der Divisor heraus kommen: als da 24 durch 4 dividirt 6 giebt, so giebt auch umgekehrt 24 durch 6 dividirt 4.

50.

Wie nun alles darauf ankommt, daß man das Dividend durch 2 Factores vorstelle, deren einer dem Divisor gleich sey, weil alsdenn der andere den Quotus anzeigt, so wird man die folgenden Exempel leicht verstehen. Erstlich, das Dividend abc durch a dividirt, giebt bc, weil a mit bc multiplicirt, abc ausmacht: eben so, wenn abc durch b dividirt wird, so kommt ac heraus; und abc durch ac dividirt, giebt b. Hernach 12mn durch 3m dividirt, giebt 4n, weil 3m mit 4n multiplicirt 12mn ausmacht: wenn aber eben diese Zahl 12mn durch 12 dividirt werden sollte, so würde mn heraus kommen.

51.

Weil eine jede Zahl a durch 1a, oder ein a, ausgedruckt werden kann, so ist hieraus offenbar, daß, wenn man a oder 1a durch 1 theilen soll, alsdenn eben dieselbe Zahl a für den Quotus heraus komme. Hingegen wenn eben dieselbe Zahl a oder 1a durch a getheilet werden soll, so wird der Quotus 1 seyn.

52.

Es geschiehet aber nicht immer, daß man das Dividend als ein Product von 2 Factoren vorstellen könne, deren einer dem Divisor gleich sey, und in solchen Fällen läßt sich die Division nicht auf diese Art bewerkstelligen. Denn, wenn ich z. E. 24 durch 7 dividiren soll, so ist die Zahl 7 kein Factor von 24, weil 7.3 erst 21. und also zu wenig, hingegen 7.4 schon 28, und also zu viel ausmacht: doch sieht man hieraus, daß der Quotus größer seyn müsse als 3, und doch kleiner als 4. Dahero um denselben genau zu bestimmen, eine andere Art von Zahlen, die Brüche genennt werden, zu Hülfe genommen werden muß, wovon in einem der folgenden Capitel gehandelt werden soll.

53.

Ehe man aber zu den Brüchen fortschreitet, so begnügt man sich, für den Quotus die nächst kleinere ganze Zahl anzunehmen, dabey aber den Rest zu bestimmen, welcher übrig bleibt; also sagt man 7 in 24 habe ich 3 mal, der Rest aber sey 3, weil 3 mal 7 nur 21 macht, so um 3 zu klein ist. Eben so sind folgende Exempel zu verstehen, als:

6	34	5	nämlich der Divisor ist 6,
	30		das Dividend ist 34,
	4		der Quotient ist 5,
			der Rest ist 4,
9	41	4	und hier ist der Divisor 6,
	36		das Dividend 41,
	5		der Quotient 4,
			der Rest 5,

In solchen Exempeln, wo ein Rest übrig bleibt, ist folgende Regel zu merken.

54.

Erstlich, daß wenn man den Theiler mit dem Quotus multipliciret, und zum Product noch den Rest addirt, alsdenn das Dividend heraus kommen müsse; und auf diese Art pflegt man die Division zu probiren, ob man recht gerechnet habe oder nicht.

Also in dem ersten der zwey letztern Exempel multiplicirt man, 6. 5 ist 30, dazu den Rest 4 addirt, kommt just das Dividend 34.

Ebenfalls in dem letzten Exempel, wenn man den Theiler 9 mit dem Quotus 4 multiplicirt, und zum Product 36 noch den Rest 5 addirt, so erhält man das Dividend 41.

55.

Letztlich ist hier auch noch nöthig, in Ansehung der Zeichen plus + und minus −, anzumerken, daß wenn

+ ab durch + a dividirt wird, der Quotus + b seyn werde, welches für sich klar ist.

Wenn aber + ab durch − a dividirt werden soll, so wird der Quotus − b seyn, weil − a mit − b mult. + ab ausmacht.

Wenn ferner das Dividend − ab heißt, und durch den Theiler + a dividirt werden soll, so wird der Quotus − b seyn, weil + a mit − b mult. − ab giebt, das ist das Dividend.

Soll endlich das Dividend − ab durch den Divisor − a getheilt werden, so wird der Quotus + b seyn, weil − a mit + b multiplicirt, − ab ausmacht.

56.

Es finden also in der Division für die Zeichen + und − eben dieselben Regeln statt, welche wir oben bey der Multiplication angemerket haben, nämlich:

+ durch + giebt +: + durch − giebt −: − durch + giebt −: − durch − giebt +;

oder kürzer, gleiche Zeichen geben plus, ungleiche aber minus.

57.

Wenn also 18 pq durch − 3 p dividiret werden soll, so wird der Quotient − 6 q seyn.

ferner: − 30 xy durch + 6 y dividirt, giebt − 5 x;

ferner: − 54 abc durch − 9 b div. giebt + 6 ac: weil − 9 b mit + 6 ac mult. − 6.9 abc, oder − 54 abc giebt: welches für die Division mit einfachen Größen genung seyn mag. Dahero wir zur Erklärung der Brüche fortschreiten wollen, nachdem wir vorher noch etwas von der Natur der Zahlen in Ansehung ihrer Theiler werden bemerket haben.

Capitel 6.

Von den Eigenschaften der ganzen Zahlen in Ansehung ihrer Theiler.

58.

Da wir gesehen haben, daß sich einige Zahlen durch gewisse Divisores theilen lassen, andere aber nicht, so ist zur Erkenntniß der Zahlen nöthig, diesen Unterschied wohl zu bemerken, und diejenigen Zahlen, die sich durch irgend einen Divisor theilen lassen, von denjenigen, die sich dadurch nicht theilen lassen, wohl zu unterscheiden, und zugleich auch den Rest, welcher bey der Division der letztern übrig bleibt, wohl anzumerken; zu welchem Ende wir die Divisores,

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, und so fort, betrachten wollen.

59.

Es sey erstlich der Divisor 2; die Zahlen also, welche sich dadurch theilen lassen, sind folgende:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, u. s. f.

welche denn so fort immer um 2 steigen. Diese Zahlen werden insgesamt gerade Zahlen genennt.

Hingegen die übrigen Zahlen

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, u. s. f.

welche sich durch 2 nicht theilen lassen, ohne daß nicht 1, im Rest bliebe; werden ungerade Zahlen genennt, und sind also immer um eins größer oder kleiner als die gerade Zahlen. Die gerade Zahlen können nun alle in dieser allgemeinen Formel 2 a begriffen werden, weil, wenn man für a nach und nach alle Zahlen annimmt,

als

als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u. s. f. daraus alle gerade Zahlen entspringen. Hingegen sind alle ungerade Zahlen in dieser Formel 2 a + 1 enthalten, weil 2 a + 1 um 1 größer ist als die gerade Zahl 2 a.

60.

Zweytens. Es sey der Divisor 3, so sind alle Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, folgende:

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, u. s. f.

welche durch diese Formel 3 a vorgestellt werden können. Denn 3 a durch 3 dividirt, giebt a zum Quotus, ohne Rest; die übrigen Zahlen aber, wenn man sie durch 3 theilen will, lassen entweder 1 oder 2 zum Rest übrig, und sind also von zweyerley Art. Die, welche 1 übrig lassen, sind folgende:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, u. s. f.

und sind in dieser Formel 3 a + 1 enthalten. Die von der andern Art, welche 2 übrig lassen, sind folgende:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, u. s. f.

welche alle in dieser Formel 3 a + 2, enthalten sind: also, daß alle Zahlen entweder in der Form 3 a, oder in dieser 3 a + 1, oder in dieser 3 a + 2, enthalten sind.

61.

Wenn ferner der Divisor 4 ist, so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen lassen, folgende,

4, 8, 12, 16, 20, 24, u. s. f.

welche immer um 4 steigen, und in der Formel 4 a enthalten sind. Die übrigen Zahlen aber, welche sich durch 4 nicht theilen lassen, lassen entweder 1 zum Rest, und sind um 1 größer als jene, nämlich:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, u. s. f.

welche folglich in dieser Formel $4a + 1$ enthalten sind. Oder sie lassen 2 zum Rest, als:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, u. s. f.

und sind in der Formel $4a + 2$ enthalten.

Oder endlich bleibt 3 zum Rest übrig, solche Zahlen sind folgende:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, u. s. f.

und sind in dieser Formel $4a + 3$ enthalten, so, daß alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln

$4a$, $4a+1$, $4a+2$, $4a+3$, enthalten sind.

62.

Eben so verhält sich die Sache mit dem Divisor 5, da alle Zahlen, welche sich dadurch theilen lassen, in der Formel $5a$ enthalten sind; diejenigen aber, welche sich dadurch nicht theilen lassen, sind entweder:

$5a + 1$, $5a + 2$, $5a + 3$, oder $5a + 4$, und so kann man weiter zu allen größern Divisoren fortschreiten.

63.

Hierbey kommt nun zu statten, was oben von der Auflösung der Zahlen in ihre einfache Factores vorgebracht worden, weil eine jegliche Zahl, unter deren Factoren sich entweder:

2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 7,

oder eine andere Zahl befindet, sich auch durch dieselbe theilen läßt: da zum Exempel

60 so viel ist als: 2. 2. 3. 5,

so ist klar, daß sich 60 durch 2, durch 3 und auch durch 5 theilen lasse.

64.

Da hernach überhaupt die Formel abcd, sich nicht nur durch a und b und c und d, sondern auch durch folgende

ab, ac, ad, bc, bd, cd, ferner auch durch

abc, abd, acd, bcd, und endlich auch durch

abcd, das ist durch sich selbst, theilen läßt,

so läßt sich gleichfalls 60, das ist 2. 2. 3. 5, außer den einfachen Zahlen, auch durch die theilen, die aus zwey Einfachen zusammengesetzt sind, nämlich durch

4, 6, 10, 15, ferner auch durch die, welche aus dreyen bestehen, als:

12, 20, 30, und endlich auch durch 60, das ist durch sich selbst.

65.

Wenn man also eine jegliche beliebige Zahl durch ihre einfache Factores vorgestellet hat, so ist es sehr leicht, alle diejenigen Zahlen anzuzeigen, wodurch sich dieselbe theilen läßt. Denn man darf nur erstlich einen jeden von den einfachen Factoren für sich selbst nehmen, hernach, je zwey, je drey, je vier, und so fort mit einander multipliciren bis man auf die vorgegebene Zahl selbst kömmt.

66.

Vor allen Dingen ist hier zu merken, daß sich eine jede Zahl durch 1 theilen lasse, so wie sich auch eine jede Zahl durch sich selbst theilen läßt; also, daß eine jede Zahl zum wenigsten zwey Theiler oder Divisores hat, nämlich 1, und sich selbsten; welche Zahlen nun außer diesen beyden Theilern, keine andere haben, sind eben diejenigen, welche oben sind einfache oder Primzahlen genennet worden.

Alle zusammengesetzte Zahlen aber haben außer 1 und sich selbsten, noch andere Divisores, wie aus folgender

gender Tafel zu sehen ist, wo unter jeder Zahl alle ihre Theiler sind gesetzt worden.

Tafel.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

67.

Endlich ist noch zu merken das 0, als eine solche Zahl angesehen werden kann, welche sich durch alle mögliche Zahlen theilen läßt; weil wenn man 0, durch eine jegliche Zahl als a theilen soll, der Quotus immer 0 ist, denn 0 mal a, oder 0 a ist 0: weil es wohl zu merken ist, daß eine jede Zahl mit 0 multiplicirt, nichts heraus bringe.

Capitel 7.

Von den Brüchen überhaupt.

68.

Wenn sich eine Zahl, als z. E. 7 durch eine andere als 3, nicht theilen läßt, so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotus nicht durch eine ganze Zahl ausdrücken läßt, keinesweges aber, daß es an sich unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotus zu machen.

Man

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich seyn sollte, diese Linie in 3 gleiche Theile zu zerschneiden und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotus, der in solchen Fällen herauskömmt, machen kann, ob gleich derselbe keine ganze Zahl ist, so werden wir hierdurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche **Brüche** oder **gebrochene Zahlen** genennet werden.

Also haben wir in obigem Exempel, wo 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem daher entspringenden Quotus, und man pfleget denselben auf folgende Art anzuzeigen $\frac{7}{3}$; wo die oben gesetzte Zahl 7 das Dividend und die unten gesetzte Zahl 3 der Divisor ist.

70.

Wenn also auf eine allgemeine Art die Zahl a, durch die Zahl b, getheilet werden soll, so wird der Quotus durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welche Schreibart ein Bruch genennet wird; dahero man sich keinen bessern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man saget, es werde dadurch der Quotus angezeiget, welcher entspringe, wenn man die obere Zahl durch die untere Zahl dividire. Hierbey ist noch zu merken, daß bey allen dergleichen Brüchen, die untere Zahl der **Nenner**, die obere aber der **Zähler** genennet zu werden pfleget.

71. In

71.

In dem oben angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher mit dem Worte sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zähler, und 3 der Nenner. Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$ zwey Drittel. $\frac{3}{4}$ drey Viertheil.

$\frac{3}{8}$ drey Achtel. $\frac{12}{100}$ zwölf Hunderttheil.

Dieser Bruch aber $\frac{1}{2}$ wird genennet, ein Halbes, anstatt ein Zweytel; denn eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotus, welcher herauskömmt, wenn man 1 in zwey gleiche Theile zerschneidet, da denn, wie bekannt ein solcher Theil ein Halbes genennet wird.

72.

Um die Natur der Brüche recht kennen zu lernen, wollen wir erstlich diesen Fall betrachten, wo die obere Zahl der untern, oder der Zähler dem Nenner gleich ist, als $\frac{a}{a}$. Weil nun dadurch der Quotus angedeutet wird, der heraus kömmt, wenn man a durch a dividiret: so ist klar, daß dieser Quotus just 1 ist, folglich ist dieser Bruch $\frac{a}{a}$ so viel als 1, oder ein Ganzes, daher sind folgende Brüche

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, u. s. f. alle einander gleich, und ein jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Ganzes.

73.

Da nun ein jeder Bruch, dessen Zähler dem Nenner gleich ist Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zähler kleiner sind als ihre Nenner, weniger als Eins. Denn wenn ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kömmt weniger als 1 heraus; wenn z. E. eine Linie von 2 Fuß in 3 gleiche Theile zerschnitten werden soll, so wird ein Theil unstreitig kleiner

ner seyn, als ein Fuß, dahero offenbar, daß $\frac{2}{3}$ weniger als 1, und dieses eben deswegen, weil der Zähler 2 kleiner ist als der Nenner 3.

74.

Wenn hingegen der Zähler größer ist als der Nenner, so ist der Werth des Bruches größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1, folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$, nämlich ein Ganzes und noch ein Halbes. Eben so ist:

$\frac{4}{3}$ so viel als $1\frac{1}{3}$; ferner $\frac{5}{3}$ so viel als $1\frac{2}{3}$;
weiter $\frac{7}{3}$ so viel als $2\frac{1}{3}$.

Und überhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotus noch einen Bruch hinzusetzen, dessen Zähler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$, dividirt man 43 durch 12, und bekömmt 3 zum Quotus und 7 zum Reste, daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

75.

Hieraus sieht man, wie Brüche deren Zähler größer sind als ihre Nenner, in zwey Glieder aufgelöset werden können, wovon das erste eine ganze Zahl ausmacht, das andere aber ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, wo der Zähler größer ist als der Nenner, unächte Brüche genennet, weil sie eins, oder mehr Ganze in sich begreifen. Hingegen sind die ächten Brüche solche, deren Zähler kleiner sind als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist als Eins, oder weniger als ein Ganzes.

76.

Man pfleget sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, wodurch die Sache nicht

wenig

wenig erläutert wird: Wenn man z. E. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar, daß derselbe 3 mal größer ist als $\frac{1}{4}$. Nun aber besteht die Bedeutung des Bruches $\frac{3}{4}$ darinnen, daß, wenn man 1 in 4 gleiche Theile zertheilet, ein solcher Theil den Werth desselben anzeiget; wenn man daher solcher drey Theile zusammen nimmt, so erhält man den Werth des Bruches $\frac{3}{4}$.

Eben so kann man einen jeglichen andern Bruch betrachten, als, $\frac{7}{12}$: wenn man 1 in 12 gleiche Theile zerschneidet, so machen 7 dergleichen Theile den Werth des vorgelegten Bruches aus.

77.

Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwähnten Namen des Zählers und Nenners entsprungen. Denn weil in dem vorigen Bruch $\frac{7}{12}$ die untere Zahl 12 anzeiget, daß 1 in 12 gleiche Theile zertheilet werden müsse, und also diese Theile benennet, so wird dieselbe füglich der Nenner genennet.

Da aber die obere Zahl, nämlich 7, anzeiget, daß für den Werth des Bruches 7 dergleichen Theile zusammen genommen werden müssen, und also dieselbe gleichsam darzählet, so wird die obere Zahl der Zähler genennet.

78.

Betrachten wir nun die Brüche, deren Zähler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift, was $\frac{3}{4}$ sind, wenn man weiß, was $\frac{1}{4}$ ist, so sind dergleichen Brüche folgende $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{13}$ u. s. f. Hierbey ist zu merken, daß diese Brüche immer kleiner werden; denn in je mehr Theile ein Ganzes zerschnitten wird, desto kleiner werden auch die Theile, also ist $\frac{1}{100}$ kleiner als $\frac{1}{10}$; und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$, und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$.

79. Hier-

79.

Hieraus sieht man nun, daß je mehr bey solchen Brüchen der Nenner vergrößert werde, die Bedeutung derselben um so viel kleiner werden müsse. Hiebey entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gänzlich verschwinde und zu nichts werde? Dieses aber wird mit Recht verneinet, denn in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. E. die Länge eines Fußes, zertheilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewisse Größe, und sind folglich nicht nichts.

80.

Es ist zwar wahr, daß, wenn man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile zertheilet, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. So bald man sie aber durch ein gut Mikroscopium betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilchen könnten zertheilet werden.

Hier ist aber die Rede keinesweges, was wir verrichten können, oder von dem, was wirklich kann verrichtet werden, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von demjenigen, was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewiß, daß, so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch gleichwohl nicht gänzlich verschwinde, oder in nichts, oder 0, verwandelt werde.

81.

Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehret würde, niemals gänzlich zu nichts kömmt, sondern diese Brüche noch immer einige Größe behalten, und also die oben gesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne Ende fortgesetzt werden kann, so pfleget man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß seyn müßte,

wenn endlich der Bruch zu 0 oder nichts werden sollte. Denn das Wort unendlich will hier eben so viel sagen, als daß man mit dem gemeldeten Bruche niemals zu Ende komme.

82.

Um nun diesen Begriff, welcher allerdings fest gegründet ist, vorzustellen, so bedienet man sich dazu dieses Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet: und daher kann man sagen, daß dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein wirkliches Nichts sey, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemalen Nichts werden kann, so lange der Nenner noch nicht ins Unendliche vermehret worden.

83.

Dieser Begriff von dem Unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemerken, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkenntniß ist hergeleitet worden, und in dem folgenden von der größten Wichtigkeit seyn wird. Es lassen sich schon hier daraus schöne Folgen ziehen, welche unsere Aufmerksamkeit verdienen, da dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ den Quotus anzeiget, wenn man das Dividend 1 durch den Divisor ∞ dividiret. Nun wissen wir schon, daß, wenn man das Dividend 1 durch den Quotus, welcher ist $\frac{1}{\infty}$, oder 0 wie wir gesehen haben, dividiret, alsdenn der Divisor, nämlich ∞ heraus komme; daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nämlich, daß dasselbe herauskomme, wenn man 1 durch 0, dividiret; folglich kann man mit Grunde sagen, daß 1 durch 0 dividiret eine unendlich große Zahl oder ∞ anzeige.

84.

Hier ist nöthig noch einen ziemlich gemeinen Irrthum aus dem Wege zu räumen, indem viele behaupten, ein unendlich Großes könne weiter nicht vermehret

mehret werden. Dieses aber kann mit obigen richtigen Gründen nicht bestehen.

Denn da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl andeutet, und $\frac{2}{0}$ ohnstreitig zweymal so groß ist; so ist klar, daß auch so gar eine unendlich große Zahl noch 2 mal größer werden könne.

Capitel 8.

Von den Eigenschaften der Brüche.

85.

Wie wir oben gesehen haben, daß jede dieser Brüche,

$\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{6}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{8}{8}$, und so fort,

ein Ganzes ausmache, und folglich alle unter einander gleich sind; so sind auch folgende Brüche,

$\frac{2}{1}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{10}{5}$, $\frac{12}{6}$, u. s. f.

einander gleich, weil ein jeder derselben zwey ganze ausmacht: denn es giebt der Zähler eines jeglichen, durch seinen Nenner dividirt 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$\frac{3}{1}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{9}{3}$, $\frac{12}{4}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{18}{6}$, u. s. f.

einander gleich, weil der Werth eines jeglichen 3 beträgt.

86.

Gleicher Gestalt läßt sich auch der Werth eines jeglichen Bruches auf unendlich vielerley Arten vorstellen. Denn wenn man sowohl den Zähler als den Nenner eines Bruches mit eben derselben Zahl, so nach Belieben genommen werden kann, multipliciret, so be-

hält der Bruch immer eben denselben Werth. Also sind alle diese Brüche,

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{7}{14}$, $\frac{8}{16}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{10}{20}$, u. s. f.

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{2}$. Eben so sind auch alle diese Brüche,

$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{5}{15}$, $\frac{6}{18}$, $\frac{7}{21}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{9}{27}$, $\frac{10}{30}$, u. s. f.

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{3}$. Ferner auch diese,

$\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{14}{21}$, $\frac{16}{24}$, u. s. f.

einander gleich; weswegen auf eine allgemeine Art dieser Bruch $\frac{a}{b}$ auf folgende Arten kann vorgestellet werden,

$\frac{a}{b}$, $\frac{2a}{2b}$, $\frac{3a}{3b}$, $\frac{4a}{4b}$, $\frac{5a}{5b}$, $\frac{6a}{6b}$, und so ferner, davon ein jeder so groß ist, als der erste $\frac{a}{b}$.

87.

Um dieses zu beweisen, darf man nur für den Werth des Bruches $\frac{a}{b}$ einen besondern Buchstaben, als c, schreiben, dergestalt, daß c der Quotus sey, wenn man a durch b dividirt. Nun aber ist gezeiget worden, daß, wenn man den Quotus c mit dem Divisor b multiplicirt das Dividend heraus kommen müsse.

Da nun c mit b multiplicirt a giebt, so wird c mit 2b multiplicirt 2a geben, und c mit 3b multiplicirt wird 3a geben; und also überhaupt c mit mb multiplicirt muß ma geben.

Machet man hieraus wieder ein Divisionsexempel und dividirt das Product ma durch den einen Factor mb, so muß der Quotus dem andern Factor gleich

seyn:

seyn: nun aber giebt ma durch mb dividirt den Bruch $\frac{ma}{mb}$, dessen Werth folglich c ist. Weil aber c dem Werth des Bruches $\frac{a}{b}$ gleich ist, so ist offenbar, daß der Bruch $\frac{ma}{mb}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich sey, man mag statt m eine Zahl annehmen, was man für eine will.

88.

Da nun ein jeglicher Bruch durch unendlich viele Formen kann vorgestellet werden, von welchen eine jede eben denselben Werth enthält, so ist unstreitig, daß derjenige am leichtesten zu begreifen sey, welcher aus den kleinsten Zahlen besteht; als da anstatt $\frac{2}{3}$ ein jeder von folgenden Brüchen, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, und so fort, nach Willkühr gesetzt werden könnte, so wird wohl niemand zweifeln, daß nicht die Form $\frac{2}{3}$ dennoch am leichtesten unter allen zu begreifen sey. Hierbey kömmt nun diese Frage vor, wie man einen Bruch, der nicht in seine kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, als z. E. $\frac{8}{12}$, in seine kleinste Form, nämlich in $\frac{2}{3}$, bringen könne.

89.

Diese Frage wird leicht aufzulösen seyn, wenn man bedenket, daß ein jeder Bruch seinen Werth behalte, wenn so wohl sein Zähler als Nenner mit einerley Zahl multiplicirt wird. Denn daher erfolget, daß wenn man auch den Zähler und Nenner eines Bruches durch eben dieselbe Zahl dividirt, der Bruch immer eben denselben Werth behalte. Dieses wird noch leichter aus der allgemeinen Form $\frac{na}{nb}$ ersehen. Denn wenn man sowohl den Zähler na als den Nenner nb durch die Zahl n dividirt, so kömmt der Bruch $\frac{a}{b}$

heraus, welcher jenem gleich ist, wie schon oben gezeiget worden.

90.

Um nun einen vorgegebenen Bruch in seine kleinste Form zu bringen, so muß man solche Zahlen finden können, wodurch sich sowohl der Zähler, als der Nenner theilen läßt. Eine solche Zahl nun wird ein gemeiner Theiler genennt, und so lange man zwischen dem Zähler und Nenner einen gemeinen Theiler anzeigen kann, so lange läßt sich der Bruch in eine kleinere Form bringen; wenn aber kein gemeiner Theiler außer 1 weiter statt findet, so ist der Bruch schon in seine kleinste Form gebracht.

91.

Um dieses zu erläutern, wollen wir den Bruch $\frac{48}{120}$ betrachten. Hier sieht man so gleich, daß sich Zähler und Nenner durch 2 theilen lassen, als woraus der Bruch $\frac{24}{60}$ entsteht. Diese beyde lassen sich nun noch einmal durch 2 theilen, und giebt die Theilung folgenden Bruch $\frac{12}{30}$, wo 2 abermal ein gemeiner Theiler ist, und $\frac{6}{15}$ heraus kommen. Hier ist aber klar, daß sich der Zähler und Nenner noch durch 3 theilen lasse, woraus der Bruch $\frac{2}{5}$ entspringt, welcher dem vorgegebenen gleich ist, und sich in der kleinsten Form befindet, weil die Zahlen 2 und 5 weiter keinen gemeinen Theiler haben außer 1, wodurch aber die Zahlen nicht kleiner werden.

92.

Diese Eigenschaft der Brüche, daß wenn man so wohl den Zähler als Nenner mit eben der Zahl entweder multiplicirt oder dividiret, der Werth des Bruchs unverändert bleibe, ist von der größten Wichtigkeit, und wird gemeiniglich darauf die ganze Lehre von den Brüchen gegründet. Es lassen sich z. E. zwey Brüche nicht

nicht wohl zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, ehe man nicht dieselben in andere Formen gebracht, deren Nenner einander gleich sind; wovon im folgenden Capitel gehandelt werden soll.

93.

Hier wollen wir nur noch bemerken, daß auch alle ganze Zahlen in Form eines Bruchs vorgestellt werden können. Also ist z.E. 6 so viel als $\frac{6}{1}$, weil 6 durch 1 dividirt auch 6 giebt. Und daher entstehen noch diese Formen:

$$\frac{12}{2},\ \frac{18}{3},\ \frac{24}{4},\ \frac{36}{6},\ \text{u. s. f.}$$

welche alle eben denselben Werth, nämlich 6, in sich haben.

Capitel 9.

Von der Addition und Subtraction der Brüche.

94.

Wenn die Brüche gleiche Nenner haben, so hat es keine Schwierigkeit, dieselben zu addiren und zu subtrahiren, indem $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$ so viel als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{7} - \frac{2}{7}$ so viel als $\frac{2}{7}$ ist. In diesem Fall verrichtet man die Addition und Subtraction bloß allein an den Zählern, und schreibt den gemeinen Nenner darunter. Also macht

$\frac{7}{100} + \frac{9}{100} - \frac{12}{100} - \frac{15}{100} + \frac{20}{100}$ so viel als $\frac{9}{100}$:
$\frac{24}{50} - \frac{7}{50} - \frac{12}{50} + \frac{31}{50}$ ist so viel als $\frac{36}{50}$ oder $\frac{18}{25}$:
$\frac{16}{20} - \frac{3}{20} - \frac{11}{20} + \frac{14}{20}$ ist so viel als $\frac{16}{20}$ oder $\frac{4}{5}$:

eben so auch $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ macht $\frac{3}{3}$ oder 1, das ist ein ganzes, und $\frac{2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$ macht $\frac{0}{4}$, das ist nichts, oder 0.

95.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so ist es allezeit möglich, dieselben in andere von gleichem Werth zu verwandeln, deren Nenner gleich sind. Also wenn diese Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gegeben sind, und zusammen addirt werden sollen, so ist zu erwägen, daß $\frac{1}{2}$ so viel ist als $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{2}{6}$: wir haben also anstatt der vorigen diese Brüche, $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$, welche geben $\frac{5}{6}$. Ferner $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ist wie das obige, nur daß das Zeichen minus darzwischen steht, also $\frac{3}{6} - \frac{2}{6}$ giebt $\frac{1}{6}$. Es seyen ferner gegeben diese Brüche $\frac{3}{4} + \frac{5}{8}$. Weil hier $\frac{3}{4}$ so viel ist als $\frac{6}{8}$, so setzen wir an derselben Stelle $\frac{6}{8}$, und $\frac{5}{8} + \frac{6}{8}$ giebt $\frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$. Wenn man fragt, wie viel $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen ausmachen, so schreibe man statt derselben nur $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$, so kommt $\frac{7}{12}$.

96.

Wenn mehr als zwey Brüche gegeben sind, als: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, welche zu gleichen Nennern gebracht werden sollen, so kommt alles darauf an, daß man eine Zahl finde, welche sich durch alle diese Nenner theilen lasse. Eine solche ist nun 60, welche den gemeinen Nenner abgiebt. Also werden wir haben anstatt $\frac{1}{2}$ diesen $\frac{30}{60}$, anstatt $\frac{2}{3}$ diesen $\frac{40}{60}$, anstatt $\frac{3}{4}$ diesen $\frac{45}{60}$, anstatt $\frac{4}{5}$ diesen $\frac{48}{60}$, anstatt $\frac{5}{6}$ diesen $\frac{50}{60}$. Sollen nun diese Brüche $\frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}, \frac{50}{60}$, zusammen addirt werden, so machen die Zähler derselben zusammen $\frac{213}{60}$, oder 3 ganze und $\frac{33}{60}$, oder $3\frac{11}{20}$.

97.

Es kommt hier alles darauf an, daß man zwey Brüche von ungleichen Nennern in andere verwandele, deren Nenner einander gleich sind. Um dieses auf

eine

eine allgemeine Art zu verrichten, so seyen die vorgegebene Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Nun multiplicire man den ersten Bruch oben und unten mit d, so bekommt man $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch so groß ist als $\frac{a}{b}$; Den andern Bruch multiplicire man, wie den ersten oben und unten mit b, so bekommt man anstatt desselben $\frac{bc}{bd}$, und sind also die Nenner jetzt gleich; die Summe aber derselben ist $\frac{ad + bc}{bd}$ und ihre Differenz ist $\frac{ad - bc}{bd}$. Wenn also diese Brüche vorgelegt sind, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{9}$, so bekommt man anstatt derselben $\frac{45}{72}$ und $\frac{56}{72}$, deren Summe $\frac{101}{72}$, die Differenz aber $\frac{11}{72}$ macht.

98.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen, welcher von zwey gegebenen Brüchen größer oder kleiner sey als der andere? Z.E. welcher von diesen zwey Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$ ist der größere? Zu diesem Ende darf man nur die beyden Brüche zu gleichen Nennern bringen, und da bekommt man für den erstern $\frac{14}{21}$, und für den andern $\frac{15}{21}$, woraus offenbar ist, daß $\frac{5}{7}$ größer ist als $\frac{2}{7}$, und zwar um $\frac{1}{21}$. Wenn ferner diese zwey Brüche gegeben sind $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}$, so bekommt man statt deren die Brüche $\frac{24}{40}$ und $\frac{25}{40}$, woraus erhellet, daß $\frac{5}{8}$ mehr sey als $\frac{3}{5}$, aber nur um $\frac{1}{40}$.

99.

Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden soll, als $\frac{2}{3}$ von 1, so darf man nur $\frac{3}{3}$ anstatt 1 schreiben, da man denn so gleich sieht, daß $\frac{1}{3}$ übrig bleibt. Eben so $\frac{5}{12}$ von 1 abgezogen, bleibt $\frac{7}{12}$. Soll

man aber $\frac{3}{4}$ von 2 abziehen, so schreibe man für 2 nur 1 und $\frac{4}{4}$, da denn 1 und $\frac{1}{4}$ übrig bleibt. Uebrigens ist bekannt, daß wenn ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt werden soll, man denselben nur schlechthin davor schreibe; als, $\frac{2}{3}$ zu 6 addirt, giebt $6\frac{2}{3}$.

100.

Bisweilen geschieht es auch, daß 2 oder mehr Brüche zusammen addirt, mehr als ein Ganzes ausmachen, welches sodann bemerkt werden muß: als $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, oder $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$ giebt $\frac{17}{12}$, welches so viel ist als $1\frac{5}{12}$. Eben so, wenn mehrere ganze Zahlen und Brüche addirt werden sollen, so addirt man erst die Brüche, und wenn ihre Summe 1 oder mehr ganze enthält, so werden dieselben hernach mit den ganzen Zahlen addirt, z. E. es wäre $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{2}{3}$ zu addiren; so machen erstlich die Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{6}$ zusammen $\frac{7}{6}$, oder $1\frac{1}{6}$, welches mit den Ganzen 6 und $\frac{1}{6}$ ausmacht.

Capitel 10.

Von der Multiplication und Division.

101.

Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zähler, und läßt den Nenner unverändert; also

2 mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$, oder 1 Ganzes
2 mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3 mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$, oder $\frac{1}{2}$;
4 mal $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$.

Man schließt hieraus die Regel, daß ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, wenn man entweder

der den Zähler damit multiplicirt, oder auch den Nenner durch die ganze Zahl dividirt, welches letztere, wenn es angeht, die Rechnung abkürzt. Z. E. es soll $\frac{8}{9}$ mit 3 multiplicirt werden, so kommt, wenn der Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird, $\frac{24}{9}$ heraus, welches so viel ist als $\frac{8}{3}$; lasse ich aber den Zähler unverändert und dividire den Nenner 9 durch 3, so bekomme ich auch $\frac{8}{3}$; das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Eben so $\frac{13}{24}$ mit 6 multiplicirt, giebt $\frac{13}{4}$ oder 3 $\frac{1}{4}$.

102.

Ueberhaupt also, wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hierbey ist zu merken, daß wenn die ganze Zahl just dem Nenner gleich ist, alsdenn das Product dem Zähler gleich werde, also:

$\frac{1}{2}$ zweymal genommen, giebt 1.
$\frac{2}{3}$ mit 3 mult. giebt 2.
$\frac{3}{4}$ mit 4 mult. giebt 3.

und allgemein, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl b, multiplicirt wird, so ist das Product a, wovon der Grund schon oben gezeigt worden; denn da $\frac{a}{b}$ den Quotus ausdruckt, wenn das Dividend a durch den Divisor b dividirt wird, und zugleich bewiesen worden, daß der Quotus mit dem Divisor multiplicirt, das Dividend geben müsse, so ist klar, daß $\frac{a}{b}$ mit b multiplicirt, die Zahl a geben müsse.

103.

Da wir nun gezeigt haben, wie man einen Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicire; so müssen wir auch sehen, wie ein Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren sey, ehe wir die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruch lehren können. Es ist aber klar, daß, wenn ich den Bruch $\frac{2}{5}$ durch 2 dividiren soll, $\frac{1}{5}$ heraus komme, eben so, wie in dem Fall, da $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ heraus kommen. Hieraus erhellet, daß man nur den Zähler durch die ganze Zahl theilen müsse, da denn der Nenner ohnverändert bleibt: Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2 div. giebt $\frac{6}{25}$, und
$\frac{12}{25}$ durch 3 div. giebt $\frac{4}{25}$, und
$\frac{12}{25}$ durch 4 div. giebt $\frac{3}{25}$, und so fort.

104.

Die Sache hat also keine Schwierigkeit, wenn sich nur der Zähler durch die vorgegebene Zahl theilen läßt: wenn aber dieses nicht angeht, so ist zu bemerken, daß man den Bruch in unendlich viele andere Formen verändern könne, unter welchen sich gewiß solche finden müssen, deren Zähler sich durch die gegebene Zahl theilen lasse. Also, wenn $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, so verwandele man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, so giebt es, wenn es durch 2 dividirt wird, $\frac{3}{8}$.

Auf eine allgemeine Art, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c dividirt werden soll, so verwandele man denselben, in diesen $\frac{ac}{bc}$, dessen Zähler ac durch c dividirt, a giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

105.

Hieraus ersehen wir, daß, wenn ein Bruch, als $\frac{a}{b}$ durch eine ganze Zahl c dividiret werden soll, man nur nöthig habe, den Nenner b mit dieser ganzen Zahl zu multipliciren, und den Zähler unverändert zu lassen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividiret, giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{16}$ durch 5 dividirt, giebt $\frac{9}{80}$. Wenn sich aber der Zähler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter. Als $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilet, giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$. Doch ist dieser Bruch so viel als jener $\frac{3}{16}$. Denn 3 mal 3 ist 9, und 3 mal 16 ist 48.

106.

Nun sind wir im Stande zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden soll. Man darf nur bedenken, daß $\frac{c}{d}$ so viel ist als c getheilt durch d: und also hat man nur nöthig, den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit c zu multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ heraus kommt; hernach durch d zu dividiren, da es denn $\frac{ac}{bd}$ giebt: und hieraus entspringt diese Regel, daß um zwey Brüche mit einander zu multipliciren, man nur nöthig habe, erstlich die Zähler, und hernach auch die Nenner besonders mit einander zu multipliciren.

Also: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ mult. giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$: ferner
$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ mult. giebt $\frac{8}{15}$; und
$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ mult. giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u. s. f.

107.

107.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll; wobey erstlich zu merken, daß wenn die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur in den Zählern verrichtet werde: weil z. E. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so vielmal enthalten ist, als 3 in 9, das ist 3mal. Dahero wenn $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$ dividirt werden soll, so darf man nur 8 durch 9 dividiren, das giebt $\frac{8}{9}$. Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ ist 3 mal: $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ ist 7 mal: $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$: eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

108.

Wenn aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weiß man, wie dieselben auf gleiche Nenner zu bringen sind. Z. E. man soll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, so bringe man erstlich diese Brüche auf gleiche Nenner, und da bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ zu dividiren, wo denn eben so viel heraus kommen muß, als wenn man den ersten Zähler ad durch den letztern bc dividiret: Folglich wird der gesuchte Quotus seyn $\frac{ad}{bc}$.

Hieraus entspringt diese Regel: man muß den Zähler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividends mit dem Zähler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zähler, und dieses den Nenner zum Quotient geben.

109.

Wenn also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt werden soll, so bekommt man nach dieser Regel $\frac{15}{16}$ zum Quotient: Wenn ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so bekommt man

man $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$, das ist 1 und $\frac{1}{2}$. Ferner, wenn durch $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

110.

Man pflegt diese Regel für die Division auf eine bequemere Art folgender Gestalt vorzutragen. Man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll, um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zähler unten schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher getheilt werden soll, mit diesen umgekehrten Bruch, so erhält man den gesuchten Quotient. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Eben so $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{15}{16}$: ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, da denn $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$ entsteht.

Man sieht also überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividirt eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$, das ist, mit 2 multiplicirt: und durch $\frac{1}{3}$ dividirt, ist eben so viel als mit $\frac{3}{1}$, das ist, mit 3 multiplicirt.

111.

Wenn dahero die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es 200; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ dividirt, giebt 3000. Wenn ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$ dividirt werden soll, so kommt 1000; und 1 durch $\frac{1}{100000}$ dividirt, giebt 100000; woraus man begreifen kann, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müsse, weil, wenn man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{1000000000}$ dividirt, die große Zahl 1000000000 heraus kommt.

112.

Wenn ein Bruch durch sich selbst dividirt werden soll, so versteht sich von selbst, daß der Quotus 1 seyn werde, weil eine jede Zahl, durch sich selbst dividirt,

giebt:

1 giebt: eben dieses weiset auch unsere Regel: als wenn z. E. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$, da denn kommt $\frac{12}{12}$, das ist, 1. Und wenn $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$, da denn $\frac{ab}{ab}$, das ist 1 heraus kommt.

113.

Es ist noch übrig, eine Redensart zu erklären, welche öfters gebraucht wird: z. E. man fragt, was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so will das so viel sagen, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so, wenn man fragt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$ sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da denn kommt $\frac{10}{24}$; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, und beträgt $\frac{27}{64}$. Welches wohl zu merken, so oft diese Redensart vorkommt.

114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen + und − eben das zu bemerken, was oben bey den ganzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder $+1$.

Capitel II.

Von den Quadratzahlen.

115.

Wenn eine Zahl mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product ein Quadrat genennet, so wie in Ansehung dessen die Zahl, daraus es entstanden, seine Quadratwurzel genennt wird.

Also,

Also, wenn man z. E. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadratzahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wenn man die Seite desselben mit sich selbst multipliciret.

116.

Daher werden alle Quadratzahlen durch die Multiplication gefunden, wenn man nämlich die Wurzel mit sich selbst multipliciret.

Also, weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; und 2 ist hingegen die Quadratwurzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadratwurzel von 9. Wir wollen demnach die Quadraten der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hersetzen, in welcher die Zahlen oder Wurzeln in der ersten, die Quadraten aber in der andern Reihe vorgestellt werden.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

117.

Bey dieser der Ordnung nach fortschreitenden Quadratzahlen bemerken wir sogleich eine schöne Eigenschaft, welche darinnen besteht, daß wenn man eine jede von der folgenden subtrahirt, die Reste in folgender Ordnung fortgehen.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 2c.

welche immer um zwey steigen, und alle ungerade Zahlen der Ordnung nach vorstellen.

118.

Auf gleiche Weise werden die Quadraten von Brüchen gefunden, wenn man nämlich einen Bruch mit sich selbst multiplicirt. Also ist von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$.

von $\frac{1}{3}$ ist das Quadrat $\frac{1}{9}$,
von $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{9}$,
von $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{16}$,
von $\frac{3}{4}$ $\frac{9}{16}$, und so ferner.

Man darf nämlich nur das Quadrat des Zählers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so bekommt man das Quadrat des Bruchs. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{8}$, und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die Wurzel von $\frac{25}{64}$.

119.

Wenn man das Quadrat von einer vermischten Zahl, welche aus einer ganzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man nur dieselbe in einen einzelnen Bruch bringen, und das Quadrat davon nehmen. Also um das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ zu finden, so ist erstlich $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$, welches beträgt $6\frac{1}{4}$. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so, um das Quadrat von $3\frac{1}{4}$ zu finden, so bemerke man, daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist als $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$ ist, welches 10 und $\frac{9}{16}$ ausmacht. Wir wollen z. E. die Quadraten, welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen, betrachten, als:

Zahlen	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quadr.	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Woraus man leicht abnehmen kann, daß, wenn die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalte. Also, wenn die Wurzel ist $1\frac{5}{12}$, so wird das Quadrat derselben gefunden

den $\frac{289}{144}$, welches ist $2\frac{1}{144}$, und also nur um sehr wenig größer als 2.

120.

Auf eine allgemeine Art, wenn die Wurzel a ist, so ist das Quadrat aa: ferner von der Wurzel 2a ist das Quadrat 4aa. Hieraus sieht man, daß wenn die Wurzel 2 mal so groß genommen wird, das Quadrat 4 mal größer werde. Ferner ist von der Wurzel 3a das Quadrat 9aa, und von der Wurzel 4a ist das Quadrat 16aa und so weiter. Heißt aber die Wurzel ab, so ist ihr Quadrat aabb, und wenn abc die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat aabbcc.

121.

Wenn daher die Wurzel aus 2 oder mehrern Factoren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wenn das Quadrat aus 2 oder mehrern Factoren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzel derselben mit einander zu multipliciren. Also, da 2304 so viel ist, als 4. 16. 36, so ist die Quadratwurzel davon 2. 4. 6, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadratwurzel von 2304, weil 48. 48 eben so viel ausmacht, als 2304.

122.

Nun wollen wir auch die Zeichen plus und minus erwägen, was es mit denselben bey den Quadraten für eine Bewandniß habe. Es erhellet sogleich, daß wenn die Wurzel das Zeichen + hat, oder eine Positivzahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine Positivzahl seyn müsse, weil + mit + multiplicirt + giebt. Also wird das Quadrat von + a seyn + aa. Wenn aber die Wurzel eine Negativzahl ist, als −a, so wird ihr Quadrat seyn + aa, eben so, als wenn die Wurzel + a wäre;

folglich ist $+aa$ eben so wohl das Quadrat von $+a$ als von $-a$; und können dahero von einem jeden Quadrat zwey Quadratwurzeln angegeben werden, deren eine positiv, die andere negativ ist. Also ist die Quadratwurzel von 25 so wohl $+5$, als -5, weil $+5$ mit $+5$ multiplicirt, und auch -5 mit -5 multiplicirt $+25$ giebt.

Capitel 12.

Von den Quadratwurzeln und den daher entspringenden Irrationalzahlen.

123.

Aus dem vorhergehenden erhellet, daß die Quadratwurzel aus einer vorgegebenen Zahl nichts anders ist, als eine solche Zahl, deren Quadrat der vorgegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadratwurzel von 4 ist 2, von 9 ist sie 3, von 16 ist sie 4, u. s. w. wobey zu merken ist, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25, ist die Quadratwurzel so wohl $+5$, als -5, weil -5 mit -5 multiplicirt, eben so wohl $+25$ ausmacht, als $+5$ mit $+5$ multiplicirt.

124.

Wenn daher die vorgegebene Zahl ein Quadrat ist, und man die Quadratzahlen so weit im Gedächtniß hat, so ist es leicht, die Quadratwurzeln zu finden: als, wenn die vorgegebene Zahl 196 wäre, so weiß man, daß die Quadratwurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen ist es ebenfalls nicht schwerer, und ist aus dem obigen klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadrat-

dratwurzel sey $\frac{5}{7}$, weil man nur so wohl von dem Zähler, als von dem Nenner die Quadratwurzel nehmen darf. Ist die vorgegebene Zahl eine vermischte Zahl als $12\frac{1}{4}$, so bringe man dieselbe auf einen einzeln Bruch, nämlich $\frac{49}{4}$, wovon die Quadratwurzel offenbar $\frac{7}{2}$ ist, oder $3\frac{1}{2}$, welches also die Quadratwurzel von $12\frac{1}{4}$ ist.

125.

Wenn aber die vorgegebene Zahl kein Quadrat ist, als z. E. 12, so ist auch nicht möglich, die Quadratwurzel davon, das ist eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, just 12 ausmache, zu finden oder anzugeben. Inzwischen aber wissen wir doch, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als 3, weil 3. 3 nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil 4. 4 schon 16 macht; wir wissen so gar auch, daß dieselbe kleiner seyn müsse, als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, denn $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$, und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$. Wir können so gar diese Wurzel noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$, denn das Quadrat von $3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, denn $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

126.

Weil nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas größer ist als die Quadratwurzel von 12, so möchte man denken, daß, wenn man anstatt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Laßt uns also $3\frac{3}{7}$ nehmen, weil $\frac{3}{7}$ um etwas weniges kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{576}{49}$, und also kleiner ist als 12. Denn 12 betragen $\frac{588}{49}$, ist also noch um $\frac{12}{49}$ zu klein. Hieraus sehen wir also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil

$\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$, und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$ in einen Bruch gebracht $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht, giebt $\frac{1452}{121}$, woraus erhellet, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist, und das nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man nun setzen, die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 zu diesen Nenner gebracht, bringt $\frac{2028}{169}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, doch nur um $\frac{3}{169}$, da doch $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

127.

Es läßt sich aber leicht begreifen, daß, was wir auch immer für einen Bruch zu 3 hinzu setzen möchten, das Quadrat davon immer einen Bruch in sich fassen müsse, und also niemals genau 12 betragen könne. Also, ungeachtet wir wissen, daß die Quadratwurzel von 12 größer ist als $3\frac{6}{13}$, doch aber kleiner als $3\frac{7}{15}$, so müssen wir doch bekennen, daß es nicht möglich sey, zwischen diesen zwey Brüchen, einen solchen ausfündig zu machen, welcher zu 3 addirt, die Quadratwurzel von 12 genau ausdrückte. Inzwischen kann man doch nicht sagen, daß die Quadratwurzel von 12 an und für sich selbst unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem angeführten nur so viel, daß dieselbe durch Brüche nicht könne ausgedrückt werden, ungeachtet sie nothwendig eine bestimmte Größe hat.

128.

Hiedurch werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche sich keineswegs durch Brüche ausdrücken lassen, und gleichwohl eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadratwurzel aus der

Zahl 12 gesehen haben. Diese neue Art von Zahlen werden nun Irrationalzahlen genennt, und solche entspringen, so oft man die Quadratwurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadratwurzel aus 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt, genau 2 hervor bringt, eine Irrationalzahl. Bisweilen pflegen auch solche Zahlen Surdische genennt zu werden.

129.

Ungeachtet sich nun solche Irrationalzahlen durch keinen Bruch vorstellen lassen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Denn z. E. die Quadratwurzel aus 12 mag auch immer noch so verborgen scheinen, so wissen wir doch, daß dieselbe eine solche Zahl ist, welche mit sich selbst multiplicirt, just 12 hervor bringt. Und diese Eigenschaft ist hinlänglich, uns einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, insonderheit, da wir immer näher zu dem Werth derselben gelangen können.

130.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrationalzahlen haben, so bedienet man sich eines gewissen Zeichens, um die Quadratwurzel von solchen Zahlen, welche keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat nun diese Figur $\sqrt{}$, und wird mit dem Wort Quadratwurzel ausgesprochen. Also $\sqrt{12}$ deutet diejenige Zahl an, welche mit sich selbst multiplicirt, 12 giebt, oder die Quadratwurzel aus 12. Eben so bedeutet $\sqrt{2}$ die Quadratwurzel aus 2: $\sqrt{3}$ die Quadratwurzel aus 3: ferner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ die Quadratwurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\sqrt{a}$, deutet die Qua-

dratwurzel aus der Zahl a an. So oft man also aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadratwurzel anzeigen soll, so bedient man sich dieses Zeichens $\surd$, welches vor dieselbe Zahl geschrieben wird.

131.

Der obgemeldete Begriff von diesen Irrationalzahlen führt uns so gleich auf einen Weg, die gewöhnlichen Rechnungen mit denselben anzustellen. Weil nämlich die Quadratwurzel aus 2 mit sich selbst multiplicirt, 2 geben muß, so wissen wir, daß, wenn $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt wird, nothwendig 2 heraus komme: eben so, $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt, giebt 3; und $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$ giebt 5; imgleichen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ giebt $\frac{2}{3}$; und überhaupt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt, giebt a.

132.

Wenn aber $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt werden
§ 121. soll, so ist das Product $\sqrt{ab}$, weil wir oben gezeigt haben, daß, wenn ein Quadrat Factores hat, die Wurzel davon auch aus den Wurzeln der Factores entstehen. Daher findet man die Quadratwurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wenn man die Quadratwurzel von a, das ist $\sqrt{a}$, mit der Quadratwurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus erhellet so gleich, daß, wenn b dem a gleich wäre, alsdenn $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{aa}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a, weil aa das Quadrat ist von a.

133.

Eben so, wenn $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt werden soll, so bekömmt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$, wobey es sich zutragen kann,

daß

daß im Quotus die Irrationalität verschwinde. Also, wenn $\sqrt{18}$ durch $\sqrt{8}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\sqrt{\frac{18}{8}}$: Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$, und die Quadratwurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

134.

Wenn die Zahl, vor welche das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$ gesetzt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrucken. Also ist $\sqrt{4}$ so viel als 2; $\sqrt{9}$ ist 3; $\sqrt{36}$ ist 6; und $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ist $\sqrt{\frac{49}{4}}$: das ist $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist demnach die Irrationalität nur scheinbar, und fällt von selbst weg.

135.

Es ist auch leicht, solche Irrationalzahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multipliciren. Also ist 2 mal $\sqrt{5}$ so viel als $2\sqrt{5}$, und $\sqrt{2}$ mit 3 multiplicirt, giebt $3\sqrt{2}$; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{9}$, so giebt auch $\sqrt{9}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt, folgende Form, nämlich $\sqrt{18}$. Also, daß $\sqrt{18}$ eben so viel ist als $3\sqrt{2}$. Eben so ist $2\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{4a}$, und $3\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{9a}$. Und auf eine allgemeine Art ist $b\sqrt{a}$ so viel als die Quadratwurzel aus bba oder $\sqrt{abb}$; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesetzt werden kann; als $b\sqrt{a}$ anstatt $\sqrt{bba}$. Diesemnach werden folgende Reductionen klar seyn.

$\sqrt{8}$, oder $\sqrt{2.4}$, ist so viel als $2\sqrt{2}$.
$\sqrt{12}$, oder $\sqrt{3.4}$, — — — $2\sqrt{3}$.
$\sqrt{18}$, oder $\sqrt{2.9}$, — — — $3\sqrt{2}$.
$\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6.4}$, — — — $2\sqrt{6}$.
$\sqrt{32}$, oder $\sqrt{2.16}$, — — — $4\sqrt{2}$.
$\sqrt{75}$, oder $\sqrt{3.25}$, — — — $5\sqrt{3}$. und so fort.

136.

Mit der Division hat es eben die Bewandniß: $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt, giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, das ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Auf eben diese Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als $\sqrt{\frac{8}{2}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ist $\sqrt{\frac{18}{2}}$, oder $\sqrt{9}$, oder 3.

$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ist $\sqrt{\frac{12}{3}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ ist $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt{\frac{4}{2}}$, oder $\sqrt{2}$.

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{3}}$, oder $\sqrt{3}$.

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ ist $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, oder $\sqrt{\frac{144}{6}}$, oder $\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6 \cdot 4}$, das ist $2\sqrt{6}$.

137.

Bey der Addition und Subtraction fällt nichts besonders zu bemerken vor, weil die Zahlen nur mit plus und minus verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

138.

Endlich ist noch zu merken, daß, zum Unterschiede dieser sogenannten Irrationalzahlen, die gewöhnlichen Zahlen, sowohl Ganze als Brüche, Rationalzahlen genennet zu werden pflegen.

Wenn also von Rationalzahlen die Rede ist, so werden darunter allezeit nur ganze Zahlen, oder auch Brüche verstanden.

Capitel 13.

Von den aus eben dieser Quelle entspringenden unmöglichen oder imaginären Zahlen.

139.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Quadraten sowohl von den positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus herauskommen; indem − a mit − a multiplicirt eben sowohl + aa giebt, als wenn man + a mit + a multiplicirt. Und dahero haben wir in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadratwurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen.

140.

Wenn es sich daher zuträgt, daß aus einer Negativzahl die Quadratwurzel gezogen werden soll, so muß man sich allerdings in einer großen Verlegenheit befinden, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine Negativzahl wäre. Denn wenn man z. E. die Quadratwurzel von der Zahl − 4 verlanget, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt − 4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist also weder + 2 noch − 2, indem sowohl + 2 als − 2, mit sich selbst multiplicirt allemal + 4 giebt, und nicht − 4.

141.

Hieraus erkennet man also, daß die Quadratwurzel von einer Negativzahl weder eine Positiv- noch Negativzahl seyn könne, weil auch von allen Negativzahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen + bekommen; folglich muß die verlangte Wurzel von einer

ganz

ganz besondern Art Zahlen seyn, indem dieselbe weder zu den Positiv- noch Negativzahlen gerechnet werden kann.

142.

Da nun oben schon angemerket worden, daß die Positivzahlen alle größer sind, als nichts, oder 0: Die Negativzahlen hingegen alle kleiner sind, als nichts, oder 0; also, daß alles, was größer ist, als nichts, durch Positivzahlen; alles aber, was kleiner ist, als nichts, durch Negativzahlen ausgedrücket wird: So sehen wir, daß die Quadratwurzeln aus Negativzahlen weder größer sind als nichts, noch kleiner als nichts. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil 0 mit 0 multiplicirt 0, und also keine Negativzahl giebt.

143.

Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als 0, oder etwa 0 selbst; so ist klar, daß die Quadratwurzel von Negativzahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: Folglich müssen wir sagen, daß dieselben unmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach unmöglich sind, und gemeiniglich imaginäre Zahlen, oder eingebildete Zahlen genennet werden, weil sie bloß allein in der Einbildung statt finden.

144.

Daher bedeuten alle diese Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, ꝛc. solche unmögliche oder Imaginärezahlen, weil dadurch Quadratwurzeln von Negativzahlen angezeiget werden.

Von diesen behauptet man also mit allem Rechte, daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht

nicht einmal nichts selbst, als aus welchem Grunde sie folglich für unmöglich gehalten werden müssen.

145.

Gleichwohl aber werden sie unserm Verstande dargestellet, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch bloß eingebildete Zahlen genennet werden. Ungeachtet aber diese Zahlen, als z. E. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar unmöglich sind, so haben wir davon doch einen hinlänglichen Begriff, indem wir wissen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbst multiplicirt zum Producte -4 hervorbringe; und dieser Begriff ist zureichend um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.

146.

Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen unmöglichen Zahlen, als z. E. von $\sqrt{-3}$, wissen, besteht darinn, daß das Quadrat davon, oder das Product, welches herauskömmt, wenn $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, -3 giebt, eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$, mult. -1. Und überhaupt, wenn man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$, multiplicirt, oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

147.

Da $-a$ so viel ist, als $+a$ mit -1 multiplicirt, und die Quadratwurzel aus einem Product gefunden wird, wenn man die Quadratwurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt, so ist Radix aus a mit -1 multiplicirt, oder $\sqrt{-a}$ so viel, als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich dieses Unmögliche, welches darinn vorkömmt, allezeit auf $\sqrt{-1}$ bringen. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel, als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt: $\sqrt{4}$ aber ist 2, also ist $\sqrt{-4}$ so viel,

als

als $2\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-9}$ so viel, als $\sqrt{9}.\ \sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-16}$ so viel, als $4\sqrt{-1}$.

148.

Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt $\sqrt{6}$ geben. Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt $\sqrt{4}$, das ist 2 geben. Hieraus sieht man, daß zwey unmögliche Zahlen mit einander multiplicirt eine mögliche oder wirkliche Zahl hervorbringen.

Wenn aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$, multiplicirt wird, so bekömmt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt allezeit etwas unmögliches.

149.

Eben so verhält sich die Sache auch mit der Division. Denn da $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt $\sqrt{+4}$ geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt wird geben $\sqrt{-1}$: Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$, das ist $\sqrt{-1}$, weil 1 so viel ist, als $\sqrt{+1}$.

150.

Wie aber die obige Anmerkung allezeit statt findet, daß die Quadratwurzel aus einer jeglichen Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder sowohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z. E. $\sqrt{4}$, sowohl $+2$ als -2 ist, und überhaupt für die Quadratwurzel aus a sowohl $+\sqrt{a}$ als $-\sqrt{a}$, geschrieben werden kann, so gilt dieses auch bey den unmöglichen Zahlen; und die Quadratwurzel aus $-a$, ist sowohl $+\sqrt{-a}$ als $-\sqrt{-a}$, wobey man die Zeichen $+$ und $-$, welche vor dem $\sqrt{}$ Zeichen gesetzt werden, von dem Zeichen so hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

151. End=

151.

Endlich muß noch ein Zweifel gehoben werden, welcher darinn besteht, daß, da dergleichen Zahlen unmöglich sind, dieselben auch ganz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen, und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein dieselbe ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem öfters Fragen vorkommen, von welchen man sogleich nicht wissen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wenn nun die Auflösung derselben auf solche unmögliche Zahlen führet, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst unmöglich sey. Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so laßt uns diese Frage betrachten: Man soll die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 40 ausmache; Wenn man nun diese Frage nach den Regeln auflöset, so findet man für die zwey gesuchten Theile $6+\sqrt{-4}$, und $6-\sqrt{-4}$, welche folglich unmöglich sind, und hieraus eben erkennet man, daß diese Frage unmöglich könne aufgelöset werden. Wollte man aber die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.

Capitel 14.

Von den Cubiczahlen.

152.

Wenn eine Zahl dreymal mit sich selbst, oder ihr Quadrat nochmals mit derselben Zahl multiplicirt wird, so wird das Product ein Cubus oder eine Cubiczahl genennet. Also ist von der Zahl a, der Cubus aaa, welcher entsteht, wenn die Zahl a mit

sich

sich selbst, nämlich mit a, und das Quadrat derselben aa, nochmals mit der Zahl a, multiplicirt wird.

Also sind die Cubi von den natürlichen Zahlen folgende,

Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Cubus 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

153.

Wenn wir bey diesen Cubiczahlen ihre Differenzen, wie bey den Quadratzahlen geschehen, in Betrachtung ziehen, indem wir eine jede von der folgenden subtrahiren, so bekommen wir folgende Reihe von Zahlen, wobey wir noch keine Ordnung bemerken,

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

wenn wir aber von denselben noch ferner die Differenzen nehmen, so erhalten wir folgende Reihe Zahlen, welche offenbar immer um 6 steigen; als:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

154.

Solchergestalt wird man auch leicht die Cubos von Brüchen finden können: also ist von $\frac{1}{2}$ der Cubus $\frac{1}{8}$; von $\frac{1}{3}$ ist er $\frac{1}{27}$, von $\frac{2}{3}$ ist er $\frac{8}{27}$. Man darf nämlich nur besonders vom Zähler und Nenner die Cubos nehmen. Also vom Bruche $\frac{3}{4}$ wird der Cubus seyn $\frac{27}{64}$.

155.

Wenn von einer vermischten Zahl der Cubus gefunden werden soll, so muß dieselbe erstlich in einen einzeln Bruch verwandelt werden, da denn die Rechnung leicht angestellet wird. Also von der Zahl $1\frac{1}{2}$ wird es leicht seyn den Cubum zu finden: denn da $1\frac{1}{2}$ zu einen einzeln Bruch gebracht $\frac{3}{2}$ ist, so wird der Cubus von $\frac{3}{2}$ seyn $\frac{27}{8}$, das ist 3 und $\frac{3}{8}$. Eben so von der

der Zahl $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ ist der Cubus $\frac{125}{64}$, das ist 1 und $\frac{61}{64}$. Ferner von der Zahl $3\frac{1}{4}$ oder $\frac{13}{4}$ ist der Cubus $\frac{2197}{64}$, welches giebt $34\frac{21}{64}$.

156.

Da von der Zahl a der Cubus aaa ist, so wird von der Zahl ab, der Cubus seyn aaabbb; woraus man sieht, daß, wenn die Zahl zwey oder mehr Factores hat, der Cubus davon gefunden werde, wenn man die Cubos von jeglichen Factoren mit einander multiplicirt. Also z. E. weil 12 so viel ist, als 3. 4, so multiplicirt man den Cubus von 3, welcher ist 27, mit dem Cubus von 4, welcher ist 64, so bekömmt man 1728, und dieses ist der Cubus von 12. Hieraus ist ferner klar, daß der Cubus von 2a ist 8aaa, und also 8 mal größer, als der Cubus von a; eben so ist von 3a der Cubus 27aaa, und also 27 mal größer als der Cubus von a.

157.

Ziehen wir nun auch die Zeichen + und − in Betrachtung, so ist für sich klar, daß von einer Positivzahl + a der Cubus + aaa, und folglich auch Positiv seyn müsse. Wenn aber von einer Negativzahl, als − a, der Cubus genommen werden soll, so nehme man erstlich das Quadrat, welches ist + aa, und da solches nochmals mit − a multiplicirt werden soll, so wird der gesuchte Cubus seyn − aaa, und wird folglich auch Negativ seyn. Dahero es mit den Cubis eine ganz andere Bewandniß hat, als mit den Quadraten, welche allezeit Positiv herauskommen. Also ist von − 1, der Cubus − 1, von − 2, der Cubus − 8; von − 3, ist er − 27, und so fort.

Capitel 15.

Von den Cubicwurzeln und den daher entspringenden Irrationalzahlen.

158.

Da gezeiget worden, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden werden soll, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche dreymal mit sich selbst multiplicirt dieselbe Zahl hervorbringe: und diese wird in Ansehung jener ihre Cubicwurzel genennet. Also ist die Cubicwurzel aus einer vorgegebenen Zahl, eine solche Zahl, deren Cubus der vorgegebenen Zahl gleich ist.

159.

Wenn also die vorgegebene Zahl eine wirkliche Cubiczahl ist, dergleichen wir im obigen Capitel gefunden, so ist leicht die Cubicwurzel davon zu finden. Also ist von 1, die Cubicwurzel 1; von 8 ist sie 2; von 27 ist sie 3; von 64 ist sie 4, und so fort:

Eben so ist auch von -27, die Cubicwurzel -3; von -125, ist sie -5. Wenn auch die Zahl gebrochen ist, so ist von $\frac{8}{27}$ die Cubicwurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner, wenn es eine vermischte Zahl ist, als $2\frac{10}{27}$, welche in einen einzeln Bruch $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubicwurzel davon $\frac{4}{3}$ das ist $1\frac{1}{3}$.

160.

Wenn aber die vorgegebene Zahl kein wirklicher Cubus ist, so läßt sich auch die Cubicwurzel davon, weder durch ganze, noch gebrochene Zahlen, ausdrücken; also da 43 keine Cubiczahl ist, so kann unmöglich weder in ganzen noch gebrochenen Zahlen, eine

Zahl

Zahl angezeiget werden, deren Cubus genau 43 ausmache. Inzwischen aber wissen wir doch so viel, daß die Cubicwurzel davon größer sey, als 3, weil der Cubus davon nur 27 ausmacht, und doch kleiner, als 4, weil der Cubus davon schon 64 ist. Folglich wissen wir, daß die verlangte Cubicwurzel zwischen den Zahlen 3 und 4, enthalten seyn müsse.

161.

Wollte man nun zu 3, weil die Cubicwurzel aus 43 größer ist als 3, noch einen Bruch hinzusetzen, so könnte man der Wahrheit näher kommen, da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so könnte derselbe niemals genau 43 werden. Man setze z. E. die gesuchte Cubicwurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$, so würde der Cubus davon seyn $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43.

162.

Hieraus ist also klar, daß sich die Cubicwurzel aus 43, auf keinerley Weise durch ganze Zahlen und Brüche, ausdrücken lasse; da wir aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben haben, so bedienet man sich dieselben anzuzeigen dieses Zeichens ($\sqrt[3]{}$), so vor die gegebene Zahl gesetzet, und mit dem Worte Cubicwurzel ausgesprochen wird, um dasselbe von der Quadratwurzel zu unterscheiden. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$, die Cubicwurzel von 43, das ist, eine solche Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche dreymal mit sich selbst multiplicirt 43, hervorbringt.

163.

Hieraus ist klar, daß dergleichen Ausdrücke keinesweges zu den Rationalen gehören, sondern eine besondere Art von Irrationalgrößen darstellen. Sie haben auch mit den Quadratwurzeln keine Gemeinschaft, und

es ist nicht möglich eine solche Cubicwurzel durch eine Quadratwurzel, als etwann $\sqrt{12}$ auszudrücken: denn da von $\sqrt{12}$ das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$, und also noch Irrational, folglich kann derselbe nicht 43 seyn.

164.

Ist aber die vorgegebene Zahl ein wirklicher Cubus, so werden diese Ausdrücke Rational, also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt[3]{aaa}$ so viel als a.

165.

Sollte man eine Cubicwurzel, als $\sqrt[3]{a}$ mit einer andern multipliciren, mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; denn wir wissen, daß die Cubicwurzel aus einem Product ab gefunden wird, wenn man die Cubicwurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wenn $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotus $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Daher begreift man, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 so viel ist als $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Daher auch umgekehrt, wenn die Zahl hinter dem Zeichen einen Factorem hat, der ein Cubus ist, die Cubicwurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden kann: Also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folget, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 dem 8. 2 gleich ist.

167. Wenn

167.

Wenn die vorgegebene Zahl negativ ist, so hat die Cubicwurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadratwurzeln geschehen; weil nämlich die Cubi von Negativzahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubicwurzel aus Negativzahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als -2 und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$, und $\sqrt[3]{-2}$ so viel als $-\sqrt[3]{2}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen ($-$) so hinter dem Cubicwurzel Zeichen ist, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also werden wir hier auf keine unmögliche, oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadratwurzeln der Negativzahlen geschehen.

Capitel 16.

Von den Potestäten, oder Potenzen überhaupt.

168.

Wenn eine Zahl mehrmals mit sich selbst multiplicirt wird, so wird das Product eine Potestät, oder auch Potenz, bisweilen auch eine Dignität genennet. Auf Deutsch könnte dieser Name durch eine Macht ausgedrückt werden. Da nun ein Quadrat entsteht, wenn eine Zahl zweymal mit sich selbst multiplicirt wird, und ein Cubus, wenn die Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt wird, so sind sowohl die Quadraten, als die Cubi, unter dem Namen der Potenzen oder Potestäten begriffen.

169.

Diese Potestäten werden nach der Anzahl, wie vielmal eine Zahl mit sich selbst multiplicirt worden, von

einander unterschieden. Also, wenn eine Zahl zweymal mit sich selbst multiplicirt wird, so heißt das Product ihre zweyte Potestät, welche also eben so viel ist, als das Quadrat davon; wird eine Zahl dreymal mit sich selbst multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potestät, welche also einerley Bedeutung mit dem Cubus hat: wird ferner eine Zahl viermal mit sich selbst multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potestät genennet, welche gemeiniglich mit dem Namen des Biquadrats beleget wird: woraus man ferner versteht, was die fünfte, sechste, siebente Potestät einer Zahl bedeute; welche höhere Potestäten übrigens keine besondere Namen zu führen pflegen.

170.

Um dieses besser zu erläutern, so bemerken wir, erstlich, daß von der Zahl 1 alle Potestäten immer 1 bleiben; weil, so vielmal man auch 1 mit sich selbst multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Laßt uns dahero die Potestäten der Zahl 2, so wie auch die Potestäten der Zahl 3 nach der Ordnung herschreiben. Diese gehen folgendermaßen fort:

Potestæten.	der Zahl 2.	der Zahl 3.
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Aber

Aber insbesondere sind die Potestäten von der Zahl 10 merkwürdig, nämlich:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,

weil sich darauf unsere ganze Rechenkunst gründet. Uebrigens ist zu merken, daß die kleinen darüber gesetzten Zahlen andeuten, die wie vielste Potestät eine jegliche sey.

171.

Wollen wir die Sache auf eine allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potestäten der Zahl a folgendergestalt verhalten:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a,	aa,	aaa,	aaaa,	aaaaa,	aaaaaa,	ꝛc.

Bey dieser Art zu schreiben ereignet sich aber diese Unbequemlichkeit, daß, wenn sehr hohe Potestäten geschrieben werden sollten, man ebendenselben Buchstaben gar viele mal hinschreiben müßte, und es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, um zu wissen, die wie vielste Potestät dadurch angezeigt werde. Also z. E. würde sich die hundertste Potestät auf diese Art schwerlich schreiben lassen, und noch viel weniger zu erkennen seyn.

172.

Dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit bequemere Art solche Potestäten auszudrücken eingeführt, welche wegen ihres herrlichen Nutzens auf das sorgfältigste erklärt zu werden verdienet. Man pflegt nämlich über der Zahl, wovon z. E. die hundertste Potestät soll angezeigt werden, etwas seitwärts zur rechten die Zahl 100 zu schreiben: Also a^{100}, welches

ausgesprochen wird, a elivirt oder erhaben zu Hundert, drückt die Hundertste Potestät von a aus. Die dabey oben geschriebene Zahl, als in unserm Fall 100, pflegt der Exponent genennt zu werden, welche Namen wohl zu bemerken sind.

173.

Nach dieser Art deutet also a^2, oder a elivirt zu 2, die zweyte Potestät von a an, und pflegt auch bisweilen anstatt aa geschrieben zu werden; weil beyde Arten gleich leicht zu schreiben, und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potestät aaa, nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potestät, a^5 die fünfte, und a^6 die sechste Potestät von a aus.

174.

Nach dieser Art werden alle Potestäten von der Zahl a folgendergestalt vorgestellt,

$$a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8, a^9, a^{10}, a^{11}, a^{12}, \text{ꝛc.}$$

woraus man sieht, daß nach dieser Art für das erste Glied a, gar füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augen fallend zu machen. Dahero ist a^1 nichts anders als a, weil die Unität anzeigt, daß der Buchstabe a nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potestäten pflegt auch eine geometrische Progression genennt zu werden, weil immer ein jedes Glied um eben so vielmal größer ist, als das vorhergehende.

175.

Wie in dieser Reihe der Potestäten ein jedes Glied gefunden wird, wenn man das vorhergehende mit a multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird; so wird auch aus einem jeden Gliede das vorherge-

hergehende gefunden, wenn man jenes durch a dividirt, als wodurch der Exponent um eines vermindert wird. Hieraus sehen wir, daß das dem ersten Glied a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ seyn müsse, das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe seyn a^0, als woraus diese merkwürdige Eigenschaft folgt, daß a^0 allezeit 1 seyn müsse, die Zahl a mag auch so groß oder so klein seyn als sie immer will, ja so gar auch, wenn a nichts ist, also das 0^0 gewiß 1 ausmacht.

176.

Wir können diese Reihe von Potestäten noch weiter rückwärts fortsetzen, und dieses so gar auf eine doppelte Weise. Einmal, indem wir immer das Glied durch a theilen; hernach aber auch, indem wir den Exponent um eins vermindern, oder eins davon subtrahiren. Und wir sind gewiß, daß nach beyderley Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese gedoppelte Art rückwärts vorstellen, welche auch rückwärts von der rechten zur linken gelesen werden muß;

	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
1ste	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$		
2te	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

Hierdurch gelangen wir also zur Erkenntniß solcher Potestäten, deren Exponenten negative Zahlen sind; und wir sind im Stande, den Werth derselben genau

 anzu=

anzuzeigen. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, folgendergestalt vor Augen legen:

Erstlich a^0, ist so viel als 1.

– – a^{-1} – – – $\frac{1}{a}$

– – a^{-2} – – – $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$

– – a^{-3} – – – $\frac{1}{a^3}$

– – a^{-4} – – – $\frac{1}{a^4}$. und so fort.

178.

Hieraus ist auch klar, wie die Potestäten von einem Product als ab gefunden werden müssen. Dieselben sind nämlich:

ab oder a^1b^1, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, a^5b^5, a^6b^6, 2c.

Eben so werden auch die Potestäten von Brüchen gefunden, als von dem Bruch $\frac{a}{b}$ sind die Potestäten folgende:

$$\frac{a^1}{b^1}, \quad \frac{a^2}{b^2}, \quad \frac{a^3}{b^3}, \quad \frac{a^4}{b^4}, \quad \frac{a^5}{b^5}, \quad \frac{a^6}{b^6}, \quad \frac{a^7}{b^7}, \text{ 2c.}$$

179.

Endlich kommen auch noch hier die Potestäten von Negativzahlen zu betrachten vor. Es sey demnach gegeben die Negativzahl $-a$, so werden ihre Potestäten der Ordnung nach also auf einander folgen,

$-a$, $+aa$, $-a^3$, $+a^4$, $-a^5$, $+a^6$, $-a^7$ 2c.

Woraus erhellet, daß nur diejenige Potestäten, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; Hinge=

Hingegen sind diejenige Potestäten, deren Exponenten gerade sind, alle positiv. Also haben die dritte, fünfte, siebente, neunte, Potestäten der negativen Zahlen alle das Zeichen −.

Die zweyte, vierte, sechste, achte, Potestäten hingegen alle das Zeichen +.

Capitel 17.

Von den Rechnungsarten mit den Potestäten.

180.

In Ansehung der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemerken, indem verschiedene Potestäten nur mit dem Zeichen + und − verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summe von der dritten und zweyten Potestät des a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wenn von der fünften Potestät die vierte abgezogen wird, und beydes kann nicht kürzer ausgedrückt werden. Wenn aber gleiche Potestäten vorkommen, so ist klar, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$ ꝛc.

181.

Bey der Multiplication solcher Potestäten aber kommt verschiedenes zu bemerken vor. Erstlich, wenn eine jede Potestät von a mit der Zahl a selbst multiplicirt werden soll, so kommt die folgende Potestät heraus, deren Exponens um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt, giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt, giebt a^4 ꝛc. Eben so mit denjenigen, deren Exponenten negativ sind, wenn dieselben mit a multiplicirt werden sollen.

sollen, darf man nur zu dem Exponens 1 addiren; Also a^{-1} mit a multiplicirt, giebt a^0, das ist 1, welches daraus klar ist, weil a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ ist, welches mit a multiplicirt, $\frac{a}{a}$ giebt, das ist 1. Eben so mit a^{-2}, wenn solches mit a multiplicirt werden soll, giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt, giebt a^{-9}, und so fort.

182.

Wenn aber eine Potestät mit aa, oder mit der zweyten Potestät multiplicirt werden soll, so wird der Exponens um 2 größer; also a^2 mit a^2 multiplicirt, giebt a^4, und a^3 mit a^2 multiplicirt, giebt a^5; ferner, a^4 mit a^2 multiplicirt, giebt a^6, und überhaupt a^n mit a^2 multiplicirt, giebt a^{n+2}. Eben so mit den Negativexponenten, als a^{-1} mit a^2 multiplicirt, giebt a^1, das ist a, welches daraus klar ist, weil a^{-1} ist $\frac{1}{a}$, dieses mit aa multiplicirt, giebt $\frac{aa}{a}$, das ist a. Eben so giebt a^{-2} mit a^2 multiplicirt a^0, das ist 1, ferner a^{-3} mit a^{-2} multiplicirt, giebt a^{-1}.

183.

Eben so ist klar, daß, wenn eine jegliche Potestät mit der dritten Potestät von a, oder mit a^3 multiplicirt werden soll, der Exponens derselben um 3 vermehrt werden müsse; oder a^n mit a^3 mult. giebt a^{n+3}. Und überhaupt, wenn zwey Potestäten von a mit einander multiplicirt werden sollen, so ist das Product wieder eine Potestät von a, deren Exponens die Summe ist von jenen

jenen Exponenten. Also a^4 mit a^5 mult. giebt a^9, und a^{12} mit a^7 mult. giebt a^{19} ꝛc.

184.

Aus diesem Grunde können die hohen Potestäten von bestimmten Zahlen ziemlich leicht gefunden werden; als wenn man z. E. die XXIVste Potestät von 2 haben wollte, so würde man dieselbe finden, wenn man die XIIte Potestät mit der XIIten Potestät multiplicirt, weil 2^{24} so viel ist, als 2^{12} mit 2^{12} multiplicirt. Nun aber ist 2^{12}, so wie wir oben gesehen haben, 4096: daher multiplicirt man 4096 mit 4096, so wird das Product 16777216 die verlangte Potestät, nämlich 2^{24} anzeigen.

185.

Bey der Division ist folgendes zu merken. Erstlich, wenn eine Potestät von a durch a dividirt werden soll, so wird ihr Exponent um 1 kleiner, oder man muß 1 davon subtrahiren. Also a^5 durch a dividirt, giebt a^4, und a^0, das ist 1, durch a dividirt, giebt a^{-1}, oder $\frac{1}{a}$. Ferner a^{-3} durch a dividirt, giebt a^{-4}.

186.

Wenn hernach eine Potestät von a durch a^2 dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten derselben 2 abziehen, und wollte man dieselbe durch a^3 dividiren, so müßte man von ihrem Exponenten 3 abziehen. Und also überhaupt, was für eine Potestät auch immer von a durch eine andere dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten der erstern den Exponenten der andern subtrahiren. Also a^{15} durch a^7 dividirt, giebt a^8, und a^6 durch a^7 dividirt, giebt a^{-1}. Ferner auch a^{-3} durch a^4 dividirt, giebt a^{-7}.

187.

Hieraus ist leicht zu begreifen, wie Potestäten von Potestäten gefunden werden müssen, weil solches durch die

die Multiplication geschieht. Also wenn man die zweyte Potestät, oder das Quadrat von a^3 verlangt, so ist dasselbe a^6, und die dritte Potestät, oder der Cubus von a^4 wird seyn a^{12}; woraus erhellet, daß um das Quadrat einer Potestät zu finden, der Exponent derselben nur verdoppelt werden müsse. Also von a^n ist das Quadrat a^{2n}, und der Cubus, oder die dritte Potestät von a^n wird seyn a^{3n}. Eben so wird auch die siebente Potestät von a^n gefunden a^{7n}, und so fort.

188.

Das Quadrat von a^2 ist a^4, das ist die vierte Potestät von a, welche dahero das Quadrat des Quadrats ist. Hieraus erhellet, warum man die vierte Potestät ein Biquadrat, oder auch ein Quadratoquadrat nennet.

Weil ferner von a^3 das Quadrat a^6 ist, so pflegt auch die sechste Potestät ein Quadratocubus genennt zu werden.

Endlich auch, weil der Cubus von a^3 ist a^9, das ist die neunte Potestät von a, so pflegt dieselbe deswegen auch ein Cubocubus genennt zu werden. Mehrere Namen sind heut zu Tage nicht üblich.

Capitel 18.

Von den Wurzeln in Absicht auf alle Potestäten.

189.

Weil die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl eine solche Zahl ist, deren Quadrat derselben gleich ist, und die Cubicwurzel eine solche, deren Cubus ihr

gleich

gleich ist, so können auch von einer jeden gegebenen Zahl solche Wurzeln angezeigt werden, deren vierte oder fünfte, oder eine beliebige andere Potestät derselben gegebenen Zahl gleich ist. Um diese verschiedene Arten von Wurzeln von einander zu unterscheiden, wollen wir die Quadratwurzel die zweyte Wurzel, und die Cubicwurzel die dritte Wurzel nennen, da denn diejenigen Wurzeln, deren vierte Potestät einer gegebenen Zahl gleich ist, ihre vierte Wurzel heißen wird, und diejenige, deren fünfte Potestät derselben Zahl gleich ist, ihre fünfte Wurzel und so fort heißen wird.

190.

Wie die zweyte oder Quadratwurzel durch das Zeichen $\sqrt{\ }$, und die dritte oder Cubicwurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[3]{\ }$ angedeutet wird; so pflegt man gleicher Weise die vierte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[4]{\ }$, die fünfte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[5]{\ }$, und so weiter, anzuzeigen; woraus denn klar ist, daß nach dieser Schreibart das Zeichen der Quadratwurzel also $\sqrt[2]{\ }$ ausgedruckt werden sollte. Weil aber die Quadratwurzel am öftersten vorkommen, so wird der Kürze halber die Zahl 2 aus dem Wurzelzeichen weggelassen. Daher, wenn in dem Wurzelzeichen keine Ziffer befindlich ist, so muß allezeit dadurch die Quadratwurzel verstanden werden.

191.

Um dieses vor Augen zu legen, so wollen wir die verschiedenen Wurzeln der Zahl a hierher setzen, und ihre Bedeutung anzeigen.

$\sqrt{a}$ ist die IIte Wurzel von a

$\sqrt[3]{a}$ = = = IIIte = = = a

$\sqrt[4]{a}$ = = = IVte = = = a

$\sqrt[5]{a}$ = = = Vte = = = a

$\sqrt[6]{a}$ = = = VIte = = = a u. s. w.

Also, daß hinwiederum die

IIte Potestät von $\sqrt{a}$ dem a gleich ist

IIIte = = = $\sqrt[3]{a}$ = = a = = =

IVte = = = $\sqrt[4]{a}$ = = a = = =

Vte = = = $\sqrt[5]{a}$ = = a = = =

VIte = = = $\sqrt[6]{a}$ = = a = = u. s. f.

192.

Die Zahl a mag nun groß oder klein seyn, so begreift man daher, wie alle Wurzeln von diesen verschiedenen Graden verstanden werden müssen.

Wobey zu merken, daß wenn für a die Zahl 1 genommen wird, alle diese Wurzeln immer 1 bleiben, weil alle Potestäten von 1 immer 1 sind.

Wenn aber die Zahl a größer ist als 1, so sind auch alle Wurzeln größer als 1.

Ist aber die Zahl kleiner als 1, so sind auch alle ihre Wurzeln kleiner als 1.

193.

Wenn die Zahl a positiv ist, so begreift man aus demjenigen, was oben von den Quadrat- und Cubicwurzeln angeführt worden, daß auch alle übrige Wurzeln wirklich angezeigt werden können, und folglich wirkliche und mögliche Zahlen sind.

Ist

Ist aber die Zahl a negativ, so werden ihre zweyten, vierten, sechsten, und überhaupt alle gerade Wurzeln unmögliche Zahlen, weil alle gerade Potestäten so wohl von Positiv- als Negativzahlen immer das Zeichen plus bekommen.

Hingegen aber werden die dritten, fünften, siebenten, und überhaupt alle ungerade Wurzeln negativ, weil die ungeraden Potestäten von Negativzahlen auch negativ sind.

194.

Wir erhalten also daher eine unendliche Menge neuer Arten von Irrational- oder Surdischen Zahlen, weil so oft die Zahl a keine solche wirkliche Potestät ist, als die Wurzel anzeiget, so oft ist es auch nicht möglich, diese Wurzel durch ganze Zahlen oder Brüche auszudrücken, folglich gehöret dieselbe in dasjenige Geschlecht von Zahlen, welche Irrationalzahlen genennt werden.

Capitel 19.

Von der Ausdrückung der Irrationalzahlen durch gebrochene Exponenten.

195.

Wir haben eben in dem letzten Capitel von den Potestäten gezeiget, daß das Quadrat von einer jeglichen Potestät gefunden wird, wenn man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweyte Potestät von a^n sey a^{2n}. Daher ist hinwiederum von der Potestät a^{2n} die Quadratwurzel a^n, und wird folglich gefunden, wenn man den Exponenten derselben halbirt, oder durch 2 dividirt.

196.

Also ist von a^2 die Quadratwurzel a^1, von a^4 ist die Quadratwurzel a^2, und von a^6 ist die Quadratwurzel a^3 und so fort. Weil nun dieses eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, wenn die Quadratwurzel von a^3 gefunden werden soll, daß dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ seyn werde. Eben so wird von a^5 die Quadratwurzel seyn $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbst, oder von a^1, wird die Quadratwurzel seyn $a^{\frac{1}{2}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel sey als $\sqrt{a}$, welche neue Manier die Quadratwurzel anzudeuten wohl zu bemerken ist.

197.

Wir haben ferner gezeigt, daß um den Cubum von einer Potestät, als a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multipliciren müsse, und also der Cubus davon seyn werde a^{3n}.

Wenn also rückwärts von der Potestät a^{3n} die dritte oder die Cubicwurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig, den Exponenten jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubicwurzel a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3, und so fort.

198.

Dieses muß nun auch wahr seyn, wenn sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubicwurzel seyn $a^{\frac{2}{3}}$. Und von a^4 ist dieselbe $a^{\frac{4}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbst, das ist, von a^1 die Cubic- oder dritte Wurzel seyn $a^{\frac{1}{3}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel sey als $\sqrt[3]{a}$.

199.

Eben so verhält es sich auch mit den höhern Wurzeln: und die vierte Wurzel von a wird seyn $a^{\frac{1}{4}}$, welches folglich eben so viel ist als $\sqrt[4]{a}$. Gleicher Weise wird die fünfte Wurzel von a seyn $a^{\frac{1}{5}}$, welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$, und dieses ist auch von allen höhern Wurzeln zu verstehen.

200.

Man könnte nun also die schon längst eingeführte Wurzelzeichen gänzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen, allein, da man einmal an jene Zeichen gewöhnt ist, und dieselben in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam, dieselben gänzlich abzuschaffen. Doch wird heut zu Tage diese neue Art auch häufig gebraucht, als welche die Natur der Sache deutlich in sich faßt. Denn daß $a^{\frac{1}{2}}$ wirklich die Quadratwurzel von a sey, sieht man gleich, wenn man nur das Quadrat davon nimmt, welches geschieht, wenn man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da denn offenbar heraus kommt a^{1}, das ist a.

201.

Hieraus ersieht man auch, wie alle übrige gebrochene Exponenten verstanden werden müssen; als wenn man hat $a^{\frac{4}{3}}$, so muß von der Zahl a erstlich ihre vierte Potestät a^{4} genommen, und hernach die Cubic- oder dritte Wurzel gezogen werden, also, daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gemeinen Art $\sqrt[3]{a^{4}}$. Eben so wird der Werth von $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wenn man erstlich

den Cubum oder die dritte Potestät von a sucht, welche a^3 ist, und hernach aus derselben die vierte Wurzel ziehet: Also, daß $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist als $\sqrt[4]{a^3}$. Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ eben so viel als $\sqrt[5]{a^4}$, und so weiter.

202.

Wenn der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1, so läßt sich der Werth auch folgendergestalt bestimmen. Es sey gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches heraus kommt, wenn man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{a}$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{a}$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$ eben so viel als $a^3\sqrt[3]{a}$; und $a^{\frac{15}{4}}$, das ist $a^{3\frac{3}{4}}$, ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Aus welchen allen der herrliche Gebrauch der gebrochenen Exponenten genugsam erhellet.

203.

§ 177. Auch in Brüchen hat derselbe seinen Nutzen. Als wenn vorgegeben ist $\frac{1}{\sqrt{a}}$, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Wir haben aber oben gesehen, daß ein solcher Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so wird $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ seyn $a^{-\frac{1}{3}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ wird verwandelt in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$, woraus entspringet a^2 multiplicirt mit $a^{-\frac{3}{4}}$, welches ferner verwandelt

wandelt wird in $a^{\frac{5}{4}}$, das ist $a^{1\frac{1}{4}}$, und das ist ferner $a\sqrt[3]{a}$. Dergleichen Reductionen werden durch die Uebung gar merklich erleichtert.

204.

Endlich ist noch zu merken, daß eine jede solche Wurzel auf vielerley Arten kann vorgestellt werden. Denn da $\sqrt{a}$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$, und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche, und $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{12}$, rc. verwandelt werden kann; so ist klar, daß $\sqrt{a}$ so viel ist als $\sqrt[4]{a^2}$, imgleichen auch $\sqrt[6]{a^3}$, imgleichen auch $\sqrt[8]{a^4}$, und so fort. Eben so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$, oder $\sqrt[9]{a^3}$, oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzelzeichen könne ausgedruckt werden:

$$\sqrt[2]{a^2}, \text{ oder } \sqrt[3]{a^3}, \text{ oder } \sqrt[4]{a^4}, \text{ oder } \sqrt[5]{a^5}, \text{ rc.}$$

205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. E. wenn $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. Solchergestalt hat man gleiche Wurzelzeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daher erhellet, weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt, giebt $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$, und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$, oder $\sqrt[6]{a^5}$. Sollte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$, das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$, also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

Capitel 20.

Von den verschiedenen Rechnungsarten und ihrer Verbindung überhaupt.

206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungsarten, als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potestäten, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.

Daher wird es nicht wenig zu besserer Erläuterung dienen, wenn wir den Ursprung dieser Rechnungsarten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man erkennen möge, ob noch andere dergleichen Arten möglich seyn oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redensart, ist so viel als, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun $=$, und wird ausgesprochen, ist gleich. Also, wenn geschrieben wird $a = b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sey als b, oder daß a dem b gleich sey; also ist z. E. $3 \cdot 5 = 15$.

207.

Die erste Rechnungsart, welche sich unserm Verstand darstellt, ist unstreitig die Addition, durch welche zwey Zahlen zusammen addirt, oder die Summe derselben gefunden werden soll. Es seyn demnach a und b die zwey gegebenen Zahlen, und ihre Summe werde durch den Buchstaben c angedeutet, so hat man $a + b = c$. Also, wenn die beyden Zahlen a und b bekannt sind, so lehrt die Addition, wie man daraus die Zahl c finden soll.

208.

Man behalte diese Vergleichung $a+b=c$, kehre aber jetzt die Frage um, und frage, wenn die Zahlen a und c bekannt sind, wie man die Zahl b finden soll.

Man fragt also, was man für eine Zahl zu der Zahl a addiren müsse, damit die Zahl c heraus komme: Es sey z. E. $a=3$ und $c=8$, also daß $3+b=8$ seyn müßte, so ist klar, daß b gefunden wird, wenn man 3 von 8 subtrahirt. Ueberhaupt also, um b zu finden, so muß man a von c subtrahiren, und da wird $b=c-a$. Denn wenn a darzu addirt wird, so bekommt man $c-a+a$, das ist c.

Hierinnen besteht also der Ursprung der Subtraction.

209.

Die Subtraction entsteht also, wenn die Frage, welche bey der Addition vorkommt, umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl, welche abgezogen werden soll, größer ist als diejenige, von der sie abgezogen werden soll: als wenn z. E. 9 von 5 abgezogen werden sollte: so erhalten wir daher den Begriff von einer neuen Art Zahlen, welche negativ genennt werden, weil $5-9=-4$.

210.

Wenn viele Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so wird ihre Summe durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdenn das Product. Also bedeutet ab das Product, welches entsteht, wenn die Zahl a mit der Zahl b multiplicirt wird. Wenn wir nun dieses Product mit dem Buchstaben c andeuten, so haben wir $ab=c$, und die Multiplication lehrt, wenn die Zahlen a und b bekannt sind, wie man daraus die Zahl c finden solle.

211.

Laßt uns nun folgende Frage aufwerfen: Wenn die Zahlen c und a bekannt sind, wie soll man daraus die Zahl b finden. Es sey z. E. $a=3$ und $c=15$, so, daß $3b=15$, und es wird gefragt, mit was für einer Zahl man 3 multipliciren müsse, damit 15 heraus komme. Dieses geschieht nun durch die Division, und wird dahero überhaupt die Zahl b gefunden, wenn man c durch a dividirt; woraus folglich diese Gleichung entsteht $b = \frac{c}{a}$.

212.

Weil es sich nun oft zutragen kann, daß sich die Zahl c nicht wirklich durch die Zahl a theilen lasse, und gleichwohl der Buchstabe b einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche Brüche genennt werden. Also, wenn wir annehmen $a=4$ und $c=3$, also, daß $4b=3$, so sieht man wohl, daß b keine ganze Zahl seyn kann, sondern ein Bruch ist, nämlich $b=\frac{3}{4}$.

213.

Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden, wenn viele Zahlen, die addirt werden sollen, einander gleich sind, so wollen wir jetzt auch bey der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potestäten, welche auf eine allgemeine Art durch diese Form a^b vorgestellt werden, wodurch angezeigt wird, daß die Zahl a so viele mal mit sich selber multiplicirt werden müsse, als die Zahl b anweiset. Hier wird, wie oben gemeldet, a die Wurzel, b der Exponent, und a^b die Potestät genennet.

214.

Lasset uns nun diese Potestät selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$, worinn also drey Buchstaben a, b, c, vorkommen. Dieses voraus gesetzt, so wird in der Lehre von den Potestäten gezeiget, wie man, wenn die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potestät selbst, das ist, den Buchstaben c bestimmen soll. Es sey z. E. $a = 5$, und $b = 3$, also das $c = 5^3$: woraus man sieht, daß von 5 die dritte Potestät genommen werden müsse, welche ist 125; also wird $c = 125$.

Hier wird also gelehrt, wie man aus der Wurzel a und den Exponenten b die Potestät c finden soll.

215.

Lasset uns nun auch hier sehen, wie die Frage umgekehrt, oder verändert werden kann, also, daß aus zweyen von diesen dreyen Zahlen a, b, c, die dritte gefunden werden soll, welches auf zweyerley Art geschehen kann, indem nebst dem c, entweder a oder b, für bekannt angenommen wird. Wobey zu merken, daß in den obigen Fällen bey der Addition und Multiplication nur eine Veränderung statt findet, weil im ersten Fall, wo $a + b = c$, es gleich viel ist, ob man nebst dem c noch a, oder b, für bekannt annimmt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe $a + b$ oder $b + a$; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $ab = c$ oder $ba = c$, wo die Buchstaben a und b ebenfalls verwechselt werden können. Allein, dieses findet nicht statt bey den Potestäten, indem vor a^b keinesweges gesetzt werden kann b^a, welches aus einem einigen Exempel leicht zu ersehen; wenn z. E. $a = 5$ und $b = 3$ gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr weit von 125 verschieden ist.

216.

Hieraus ist klar, daß hier wirklich noch zwey Fragen angestellt werden können, wovon die erste ist: Wenn nebst der Potestät c noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll; Die zweyte Frage aber ist, wenn nebst der Potestät c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll.

217.

Im obigen ist nur die erste von diesen zwey Fragen erörtert worden, und dieses ist geschehen in der Lehre von der Ausziehung der Wurzel. Denn wenn man z. E. $b=2$ und $a^2=c$, so muß a eine solche Zahl seyn, deren Quadrat dem c gleich sey, und da wird $a=\sqrt[2]{c}$. Eben so, wenn $b=3$, so hat man $a^3=c$, da muß also der Cubus von a der gegebenen Zahl c gleich seyn, und da erhält man $a=\sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf eine allgemeine Art verstehen, wie man aus den beyden Buchstaben c und b den Buchstaben a finden müsse. Es wird nämlich seyn $a=\sqrt[b]{c}$.

218.

So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl c nicht wirklich eine solche Potestät ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben bemerket worden, daß die verlangte Wurzel a weder im Ganzen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational- oder Surdische Zahlen genennt werden; von welchen es nach der Mannichfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns

diese Betrachtung noch auf eine ganz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre, oder eingebildete Zahlen genennt werden.

219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrig sey, nämlich, wenn außer der Potestät c noch die Wurzel a für bekannt angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der ganzen Mathematic so groß ist, daß fast keine weitläufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, wo wir wieder auf ganz neue Arten von Zahlen, welche nicht einmal zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können, werden geleitet werden.

Capitel 21.

Von den Logarithmen überhaupt.

220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b = c$, und bemerken zuförderst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewisse Zahl nach Belieben fest gestellet werde, also, daß dieselbe immer einerley Werth behalte. Wenn nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potestät a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genennet, und um dieselben anzuzeigen, werde ich mich in Zukunft des Zeichens eines deutschen l bedienen, welches der Zahl c vorgesetzt

vorgesetzt wird; und also schreibt man $b = lc$, wodurch angedeutet wird, daß b gleich sey dem Logarithmus der Zahl c, oder der Logarithmus von c sey b.

221.

Nachdem also die Wurzel a einmal fest gestellet worden, so ist der Logarithmus einer jeglichen Zahl c, nichts anders, als der Exponent derjenigen Potestät von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$ so ist b der Logarithmus der Potestät a^b. Setzet man nun $b = 1$. so ist 1 der Logarithmus von a^1, das ist $la = 1$: setzt man $b = 2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $la^2 = 2$. Eben so wird man haben: $la^3 = 3$, $la^4 = 4$, $la^5 = 5$, und so ferner.

222.

Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus seyn von a^0: nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $l1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will.

Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; also hat man

$l\frac{1}{a} = -1$. Eben so bekömmt man $l\frac{1}{a^2} = -2$, $l\frac{1}{a^3} = -3$,

$l\frac{1}{a^4} = -4$, rc.

223.

Hieraus erhellet, wie die Logarithmen von allen Potestäten der Wurzel a und auch so gar von Brüchen, deren Zähler = 1, der Nenner aber eine Potestät von a ist, können angezeiget werden; in welchen Fällen die Logarithmen ganze Zahlen sind. Nimmt man aber für b Brüche an, so werden dieselben Logarithmen von Irrationalzahlen; wenn nämlich $b = \frac{1}{2}$, so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus

garithmus von $a^{\frac{1}{2}}$, oder von $\sqrt{a}$. Dahero bekömmt man $l\sqrt{a} = \frac{1}{2}$; Eben so $l\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $l\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, u.s.f.

224.

Wenn aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden soll, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine ganze Zahl noch ein Bruch seyn kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponent geben, nämlich b, so daß die Potestät a^b der gegebenen Zahl c gleich werde, und alsdenn hat man $b = lc$. Folglich hat man auf eine allgemeine Art $a^{lc} = c$.

225.

Laßt uns nun eine andere Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfalls durch ld angedeutet wird, also daß $a^{ld} = d$. Man multiplicire nun diese Formel mit der vorhergehenden $a^{lc} = c$, so bekömmt man $a^{lc+ld} = cd$: nun aber ist der Exponent allezeit der Logarithmus der Potestät; folglich ist $lc + ld = lcd$. Dividirt man aber die erste Formel durch die letztere, so bekömmt man $a^{lc-ld} = \frac{c}{d}$. Folglich wird $lc - ld = l\frac{c}{d}$.

226.

Hierdurch werden wir zu den zwey Haupteigenschaften der Logarithmen geführet, wovon die erste in der Gleichung $lc + ld = lcd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus von einem Producte, als cd gefunden werde, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Die zweyte Eigenschaft ist in der Gleichung $lc - ld = l\frac{c}{d}$ enthalten, und zeiget an, daß der Logarithmus von einem Bruche gefunden werde, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

227.

Und eben hierinn besteht der herrliche Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Weil, wenn zwey Zahlen mit einander multiplicirt oder dividiret werden sollen, man nur nöthig habe, die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offenbar, daß es ungleich viel leichter sey Zahlen zu addiren oder subtrahiren, als zu multipliciren oder dividiren, insonderheit, wenn die Zahlen sehr groß sind.

228.

Noch wichtiger aber ist der Nutzen bey den Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln. Denn wenn $d = c$, so hat man aus der erstern Eigenschaft $lc + lc = lcc$, also ist $lcc = 2lc$: Eben so bekömmt man $lc^3 = 3lc$ und $lc^4 = 4lc$, und allgemein $lc^n = nlc$.

Nimmt man nun für n gebrochene Zahlen an, so bekömmt man $lc^{\frac{1}{2}}$, das ist $l\sqrt{c} = \frac{1}{2}lc$; ferner auch für Negativzahlen lc^{-1}, das ist $l\frac{1}{c} = -lc$, und lc^{-2}, das ist $l\frac{1}{cc} = -2lc$, und so fort.

229.

Wenn man also solche Tabellen hat, worinnen für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, so kann man durch Hülfe derselben die schwersten Rechnungen, wo große Multiplicationen und Divisionen, imgleichen auch Erhebungen zu Potestäten und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mit leichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln, sowohl für jede Zahl ihre Logarithmen, als auch für einen jeden Logarithmus die Zahl selbst, finden kann. Also, wenn man aus einer Zahl c die Quadratwurzel finden soll, so suchet man erstlich den Logarithmus der Zahl c, welcher ist lc, hernach nimmt man davon die Hälfte, welche ist $\frac{1}{2}lc$, und diese ist der Logarithmus von der gesuch-

ten Quadratwurzel: also die Zahl, die diesem Logarithmus zukömmt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadratwurzel selbst.

230.

Wir haben oben gesehen, daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, rc. und folglich alle Positivzahlen Logarithmen sind von der Wurzel a und ihren positiven Potestäten; das ist von Zahlen die größer sind als Eins.

Hingegen die Negativzahlen, als -1, -2, rc. sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ rc. welche kleiner sind als Eins, gleichwohl aber noch größer als nichts.

Hieraus folget, daß wenn der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer größer sey als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber größer als 0. Folglich können für Negativzahlen keine Logarithmen angezeiget werden, oder die Logarithmen von Negativzahlen sind unmöglich, und gehören zu dem Geschlechte der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

231.

Um dieses besser zu erläutern, wird dienlich seyn, für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen, und zwar diejenige, nach welcher die üblichen logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darinn die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die ganze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür eine jegliche andere Zahl, die nur größer ist als Eins, angenommen werden könnte; denn wenn man $a = 1$ setzen wollte, so würden alle Potestäten davon, als $a^b = 1$, und immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl, als c, gleich werden können.

Capitel 22.

Von den üblichen Logarithmischen Tabellen.

232.

In diesen Tabellen wird, wie gemeldet zum Grunde geleget, daß die Wurzel $a=10$ sey; Also ist der Logarithmus von einer jeglichen Zahl c derjenige Exponent, zu welchen, wenn die Zahl 10 erhoben wird, die Potestät der Zahl gleich werde. Oder, wenn der Logarithmus der Zahl c durch lc angedeutet wird, so hat man immer $10^{lc}=c$.

233.

Wir haben schon bemerket, daß von der Zahl 1 der Logarithmus immer 0 sey, weil $10^0=1$, also ist $l1=0$, $l10=1$, $l100=2$, $l1000=3$, $l10000=4$, $l100000=5$, $l1000000=6$.

Ferner $l\frac{1}{10}=-1$, $l\frac{1}{100}=-2$, $l\frac{1}{1000}=-3$, $l\frac{1}{10000}=-4$, $l\frac{1}{100000}=-5$, $l\frac{1}{1000000}=-6$.

234.

Wie sich nun die Logarithmen von diesen Hauptzahlen von sich selbst ergeben, so ist um so viel schwerer die Logarithmen aller übrigen Zahlen zu finden, welche gleichwohl in den Tabellen müssen angezeiget werden. Hier ist auch noch nicht der Ort, eine hinlängliche Anweisung zu geben, wie dieselben gefunden werden sollen, daher wollen wir nur überhaupt bemerken, was dabey zu beobachten vorkömmt.

235.

Da nun $l1=0$, und $l10=1$, so ist leicht zu erachten, daß von allen Zahlen zwischen 1 und 10, ihre Logarith-

garithmen zwischen 0 und 1 enthalten seyn müssen, oder sie sind größer als 0, und doch kleiner als 1;

Laßt uns nur die Zahl 2 betrachten, so ist gewiß, daß ihr Logarithmus, den wir durch den Buchstaben x andeuten wollen, also, daß $l2 = x$, größer sey als 0, und doch kleiner als 1. Es muß aber eine solche Zahl seyn, daß 10^x just dem 2 gleich werde.

Man kann auch leicht sehen das x viel kleiner seyn müsse als $\frac{1}{2}$, oder, daß $10^{\frac{1}{2}}$ größer sey als 2, denn wenn man beyderseits die Quadraten nimmt, so wird das Quadrat von $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$: das Quadrat von 2 aber wird 4, also viel kleiner. Eben so ist auch $\frac{1}{2}$ für x noch zu groß, oder $10^{\frac{1}{3}}$ ist größer als 2. Denn der Cubus von $10^{\frac{1}{3}} = 10$, der Cubus von 2 aber ist nur 8. Hingegen ist $\frac{1}{4}$ für x angenommen zu klein: denn $10^{\frac{1}{4}}$ ist kleiner als 2, weil die vierte Potestät von jenem 10 ist, von diesem aber 16. Hieraus sieht man also das x oder der $l2$ kleiner ist als $\frac{1}{3}$, und doch größer als $\frac{1}{4}$; man kann auch für einen jeden andern Bruch der zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist, finden, ob derselbe zu groß oder zu klein sey. Als $\frac{2}{7}$ ist kleiner als $\frac{1}{3}$, und größer als $\frac{1}{4}$, wollte man nun $\frac{2}{7}$ für x nehmen, so müßte $10^{\frac{2}{7}} = 2$ seyn, wenn aber dieses wäre, so müssen auch die siebende Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{2}{7}}$ die siebende Potestät $= 10^2 = 100$, welche der siebenden Potestät von 2 gleich seyn müßte; da nun die siebende Potestät von $2 = 128$, und also größer als jene, so ist auch $10^{\frac{2}{7}}$ kleiner, als 2, und also $\frac{2}{7}$ kleiner als $l2$: oder $l2$ ist größer als $\frac{2}{7}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

Ein solcher Bruch ist $\frac{3}{10}$; sollte nun $10^{\frac{3}{10}} = 2$ seyn, so müßten auch die zehnte Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{3}{10}}$ die zehnte Potestät $= 10^3 = 1000$, von 2 aber ist die zehnte Potestät $= 1024$; woraus wir schließen, daß $\frac{3}{10}$ noch zu klein ist, oder das $l2$ größer sey als $\frac{3}{10}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

236.

Diese Betrachtung dienet, um zu zeigen, daß $l2$ seine bestimmte Größe habe, weil wir wissen, daß derselben gewiß größer ist als $\frac{3}{10}$, und doch kleiner als $\frac{1}{3}$. Weiter können wir hier noch nicht gehen, und weil wir den wahren Werth noch nicht wissen, so wollen wir für denselben den Buchstaben x gebrauchen, also daß $l2 = x$, und zeigen, wenn derselbe gefunden wäre, wie man daraus von unzählig viel andern Zahlen, die Logarithmen finden könne; wozu die oben gegebene Gleichung dienet $lcd = lc + ld$, oder, daß der Logarithmus von einem Producte gefunden werde, wenn man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt.

237.

Da nun $l2 = x$, und $l10 = 1$, so bekommen wir $l20 = x + 1$, und $l200 = x + 2$, ferner $l2000 = x + 3$; weiter $l20000 = x + 4$, und $l200000 = x + 5$, u. s. f.

238.

Da ferner $lc^2 = 2lc$ und $lc^3 = 3lc$, $lc^4 = 4lc$, ꝛc. so erhalten wir daher $l4 = 2x$, $l8 = 3x$, $l16 = 4x$, $l32 = 5x$, $l64 = 6x$, ꝛc.

Hieraus finden wir ferner $l40 = 2x + 1$, $l400 = 2x + 2$, $l4000 = 2x + 3$, $l40000 = 2x + 4$, ꝛc.

$l80 = 3x + 1$, $l800 = 3x + 2$, $l8000 = 3x + 3$, $l80000 = 3x + 4$, ꝛc.

$l160 = 4x + 1$, $l1600 = 4x + 2$, $l16000 = 4x + 3$, $l160000 = 4x + 4$, ꝛc.

239.

Da ferner gefunden worden $l\frac{c}{d} = lc - ld$, so setze man $c = 10$, und $d = 2$, und weil $l10 = 1$ und $l2 = x$, so bekommen wir $l\frac{10}{2}$, das ist $l5 = 1 - x$; daher erhalten wir

$l50 = 2 - x$, $l500 = 3 - x$, $l5000 = 4 - x$, ꝛc.

ferner, $l25 = 2 - 2x$, $l125 = 3 - 3x$, $l625 = 4 - 4x$, ꝛc.

Daher gelangen wir weiter zu folgenden:

$l250 = 3 - 2x$, $l2500 = 4 - 2x$, $l25000 = 5 - 2x$, ꝛc.

ferner,

$l1250 = 4 - 3x$, $l12500 = 5 - 3x$, $l125000 = 6 - 3x$, ꝛc.

ferner,

$l6250 = 5 - 4x$, $l62500 = 6 - 4x$, $l625000 = 7 - 4x$, und so fort.

240.

Hätte man auch den Logarithmus von 3 gefunden, so könnte man daher noch von unendlich viel mehrern Zahlen die Logarithmen bestimmen. Wir wollen den Buchstaben y für $l3$ setzen, und daher würden wir haben:

$l30 = y + 1$, $l300 = y + 2$, $l3000 = y + 3$, ꝛc.

$l9 = 2y$, $l27 = 3y$, $l81 = 4y$, $l243 = 5y$, ꝛc.

daher kann man noch weiter finden:

$l6 = x + y$, $l12 = 2x + y$, $l18 = x + 2y$,

imgleichen auch $l15 = l3 + l5 = y + 1 - x$.

241.

Wir haben oben gesehen, daß alle Zahlen aus den sogenannten Primzahlen durch die Multiplication hervorgebracht werden. Also, wenn nun die Logarithmen der Primzahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen bloß durch die Addition finden; als z. E. von der Zahl 210, welche aus folgenden Factoren besteht, 2. 3. 5. 7, wird seyn der Logarithmus $= l2 + l3 + l5 + l7$: gleichergestalt

Staatl. Bibliothek Passau

da $360 = 2.2.2.3.3.5 = 2^3\,3^2.5$, so wird $l360 = 3l2 + 2l3 + l5$, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Primzahlen, die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bey Verfertigung der logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen von allen Primzahlen gefunden werden.

Capitel 23.

Von der Art die Logarithmen vorzustellen.

242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$, und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder, daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwey Brüchen fallen müsse, wenn die Potestät dem 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen, was man immer für einen will, so wird die Potestät immer eine Irrationalzahl, und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, daher sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmerklich werde. Hierzu bedienet man sich der sogenannten Decimalbrüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlicher erkläret zu werden verdienet.

243.

Man weiß, daß in der gewöhnlichen Art alle Zahlen mit den zehen Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

zu schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihre natürliche Bedeutung haben, und

daß

daß auf der zweyten Stelle ihre Bedeutung 10 mal grö-ßer werde, auf der dritten aber 100 mal, auf der vierten 1000 mal, und so fort, auf einer jeden folgenden Stelle 10 mal größer als auf der vorhergehenden.

Also in dieser Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur rechten die Ziffer 5 die auch wirklich 5 bedeutet, auf der zweyten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern 10. 6 oder 60 anzeiget: die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet 100. 7 oder 700, und endlich das 1 auf der vierten Stelle bedeutet 1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen, indem man saget:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechzig, und Fünf.

244.

Wie nun von der Rechten zur Linken die Bedeutung der Ziffern immer 10 mal größer, und folglich von der Linken zur Rechten immer 10 mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetze noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da denn die Bedeutung der Ziffern immer fort 10 mal kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemerken, wo die Ziffern ihren natürlichen Werth haben, dieses geschieht durch ein Comma, so hinter diese Stelle gesetzt wird. Wenn man dahero diese Zahl geschrieben findet, als 36, 54892, so ist dieselbe also zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, und die Ziffer 3 auf der zweyten Stelle von der Linken 30. Aber nach dem Comma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$, die folgenden 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9, $\frac{9}{10000}$, und die Ziffer 2, $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Bedeutungen immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie vor nichts zu achten sind.

245.

Diese Art die Zahlen auszudrücken heißt nun ein Decimalbruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellet. Daselbst wird z.E. der Logarithmus von 2 also ausgedruckt 0,3010300. Wobey folglich zu merken, daß weil vor dem Comma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Ganzes betrage, und daß sein Werth sey $\frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{0}{10000} + \frac{3}{100000} + \frac{0}{1000000} + \frac{0}{10000000}$. Man hätte also wohl die zwey hintersten 0 weglassen können, allein dieselben dienen um zu zeigen, daß von diesen Theilchen wirklich keine vorhanden sind. Man läugnet aber nicht, daß nicht weiter noch kleinere Theilchen folgen sollten, welche man aber wegen ihrer Kleinigkeit für nichts achtet.

246.

Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt 0, 4771213; woraus man sieht, daß derselbe kein Ganzes betrage, sondern, daß er aus diesen Brüchen bestehe ,

$$\frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{2}{100000} + \frac{1}{1000000} + \frac{3}{10000000}.$$

Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus solchergestalt ganz genau ausgedrückt sey. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch wirklich so klein ist, daß man ihn in den meisten Rechnungen aus der Acht lassen kann.

247.

Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0, 0000000, weil derselbe wirklich 0 ist; von 10 aber heißt der Logarithmus 1, 0000000, woraus man erkennet, daß derselbe just 1 sey. Von 100 aber ist der Logarithmus 2, 0000000, oder just 2, woraus zu sehen, daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder, welche mit zwey Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten seyn müssen, und folglich durch 1

und

und einen Decimalbruch ausgedrückt werden. Also ist l50 = 1, 6989700, derselbe ist also 1, und noch über das $\frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{9}{10000} + \frac{7}{100000}$. Von den Zahlen aber über hundert bis 1000, enthalten die Logarithmen 2 nebst einem gesetzten Decimalbruche; als l800 = 2, 9030900. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4, und so fort.

248.

Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Ganzes, und deswegen steht vor dem Comma eine 0. Bey einem jeden Logarithmus sind also zwey Theile zu bemerken. Der erste steht vor dem Comma und zeiget die Ganzen an, wenn dergleichen vorhanden; der andere Theil aber zeiget die Decimalbrüche an, die zu dem Ganzen noch gesetzt werden müssen. Also ist es leicht den ersten oder ganzen Theil des Logarithmus einer jeglichen Zahl anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Derselbe ist ferner 2 für diejenige, so aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um eins kleiner, als die Anzahl der Ziffern. Wenn man also den Logarithmus von 1766 verlanget, so weiß man schon, daß der erstere oder ganze Theil davon 3 seyn muß.

249.

Umgekehrt also, sobald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, so weiß man, aus wie viel Figuren die Zahl selbst bestehen werde, weil die Anzahl der Figuren immer um eins größer ist, als der ganze Theil des Logarithmus. Wenn man also für eine unbekannte Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6, 4771213, so wüßte man sogleich, daß dieselbe Zahl aus 7 Figuren

bestehe, und also größer seyn müsse als 1000000. Diese Zahl ist auch wirklich 3000000: denn l3000000 = l3 + l1000000. Nun aber ist l3 = 0, 4771213 und l1000000 = 6, welche zwey Logarithmus zusammen addirt, geben 6. 4771213.

250.

Bey einem jeglichen Logarithmus kömmt also die Hauptsache auf den nach dem Comma folgenden Decimalbruch an, welcher, wenn er einmal bekannt ist, für viele Zahlen dienen kann. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten, dessen erster Theil unstreitig 2 ist, für den andern Theil aber, nämlich den Decimalbruch, wollen wir der Kürze halber den Buchstaben x schreiben, also, daß l365 = 2 + x; hieraus erhalten wir, wenn wir immerfort mit 10 multipliciren, l3650 = 3 + x; l36500 = 4 + x; l365000 = 5 + x. Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren, so bekommen wir l36, 5 = 1 + x; l3, 65 = 0 + x; l0, 365 = − 1 + x; l0, 0365 = −2 + x; l0, 00365 = − 3 + x, und so ferner.

251.

Vor alle diese Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen 0 hinter oder vor sich haben, bleibt einerley Decimalbruch in ihren Logarithmis, und der Unterscheid befindet sich nur in der ganzen Zahl vor dem Comma, welche, wie wir gesehen, auch negativ werden kann, wenn nämlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gemeinen Rechner nicht wohl mit den Negativzahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die ganze Zahl der Logarithmen um 10 vermehret, und anstatt 0 vor dem Comma, pfleget man schon 10 zu schreiben, da man denn anstatt − 1, bekömmt 9; anstatt − 2 bekömmt man 8; anstatt − 3, bekömmt man 7, und so fort. Hier muß aber gar nicht aus der Acht

gelassen werden, daß die ganze Zahlen vor dem Comma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe, die Zahl bestehe aus 10 oder 9 oder 8 Figuren, sondern daß die Zahl erst nach dem Comma, entweder auf der ersten Stelle, wenn 9 vorhanden, oder auf der zweyten Stelle, wenn 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wenn 7 vom Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen vorgestellt.

252.

In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimalbrüche für die Logarithmen in sieben Figuren, wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher seyn, daß dieselben um kein einziges solches Theilchen von der Wahrheit abweichen, welcher Fehler gemeiniglich nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen noch auf mehr als sieben Figuren vorgestellet werden, welches in den großen Vlacquischen Tabellen geschieht, allwo die Logarithmen auf zehn Figuren berechnet sind.

253.

Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt oder angezeigt, sondern man findet daselbst nur die sieben Figuren des Decimalbruchs, welche den zweyten Theil ausmachen. In den englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis auf 100000 ausgedrückt, und wenn größere Zahlen noch vorkommen, so sind kleine Täfelchen beygefügt, woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Figuren noch zu den Logarithmen addirt werden müsse.

254.

Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus hinwiederum die ihm zu-

kommende Zahl aus den Tabellen nehmen soll. Um die Sache besser zu erläutern, so wollen wir z. E. diese Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun die Logarithmen davon addirt werden müssen, so kommt die Rechnung also zu stehen.

l 343 = 2, 5352941		addirt
l 2401 = 3, 3803922		
5, 9156863		subtrahirt
6847		
Giebt also 823543.	16	

Diese Summe ist nun der Logarithmus des gesuchten Products, und aus desselben ersten Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Figuren bestehe, welche aus dem Decimalbruch vermittelst der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist wirklich das gesuchte Product.

255.

Da bey Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen besonders einen wichtigen Vortheil leisten, so wollen wir auch dieses mit einem Exempel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadratwurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig, den Logarithmus von 10, welcher ist 1,0000000 durch 2 zu dividiren, so wird der Quotus 0,5000000, der Logarithmus der gesuchten Wurzel seyn. Daher die Wurzel selbst aus den Tabellen gefunden wird 3,16228, wovon auch wirklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilchen größer ist als 10.

Ende des ersten Abschnitts.

Des

Des
Ersten Theils
Zweyter Abschnitt.
Von
den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Des
Ersten Theils
Zweyter Abschnitt.
Von den verschiedenen Rechnungsarten mit zusammengesetzten Größen.

Capitel 1.
Von der Addition mit zusammengesetzten Größen.

256.

Wenn zwey oder mehr Formeln, welche aus viel Gliedern bestehen, zusammen addirt werden sollen, so pflegt die Addition zuweilen nur durch gewisse Zeichen angedeutet zu werden, indem man eine jede Formel in Klammern einschließt, und dieselben mit dem Zeichen + verbindet. Also, wenn diese Formel $a+b+c$ und $d+e+f$ zusammen addirt werden sollen, so wird die Summe also angezeigt:

$$(a+b+c)+(d+e+f).$$

257.

Solchergestalt wird die Addition nur angedeutet, nicht aber vollzogen. Es ist aber leicht einzusehen, daß um dieselbe zu vollziehen, man nur nöthig habe, die Klammern weg zu lassen: denn da die Zahl $d+e+f$, zur ersten addirt werden soll, so geschieht solches, wenn man erstlich $+d$, hernach $+e$, und endlich $+f$ hinzu schreibt, da denn die Summe seyn wird:

$$a+b+c+d+e+f.$$

Eben dieses würde auch zu beobachten seyn, wenn einige Glieder das Zeichen $-$ hätten, als welche sodann gleichfalls mit ihrem Zeichen hinzu geschrieben werden müßten.

258.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir ein Exempel in puren Zahlen betrachten, und zu der Formel $12-8$ noch diese $15-6$ addiren.

Man addire also erstlich 15, so hat man $12-8+15$: man hat aber zu viel addirt, weil man nur $15-6$ addiren sollte, und es ist klar, daß man 6 zu viel addiret habe: man nehme also diese 6 wieder weg, oder schreibe sie mit ihrem Zeichen dazu, so hat man die wahre Summe:

$$12-8+15-6.$$

Woraus erhellet, daß die Summe gefunden wird, wenn man alle Glieder, ein jedes mit seinem Zeichen, zusammen schreibt.

259.

Wenn demnach zu dieser Formel $a-b+c$ noch diese $d-e-f$ addirt werden soll, so wird die Summe folgendergestalt ausgedrückt:

$$a-b+c+d-e-f.$$

Wobey wohl zu bemerken, daß es hier gar nicht auf die Ordnung der Glieder ankomme, sondern dieselben

nach

nach Belieben unter einander versetzt werden können, wenn nur ein jedes sein ihm vorgesetztes Zeichen behält. Also könnte die obige Summe auch also geschrieben werden:

$$c - e + a - f + d - b.$$

260.

Folglich hat die Addition nicht die geringste Schwierigkeit, wie auch immer die Glieder aussehen mögen. Also, wenn zu dieser Formel $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\,lc$ noch diese $5\sqrt[5]{a} - 7c$ addirt werden sollte, so würde die Summe seyn:

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4\,lc + 5\sqrt[5]{a} - 7c:$$

woraus erhellet, daß dieses die Summe sey, und es auch erlaubt ist, diese Glieder nach Belieben unter einander zu versetzen, wenn nur ein jedes sein Zeichen behält.

261.

Oefters trägt es sich aber zu, daß die solchergestalt gefundene Summe weit kürzer zusammen gezogen werden kann, indem zuweilen zwey oder mehr Glieder sich gänzlich aufheben. Als wenn in der Summe diese Glieder $+a - a$, oder solche $3a - 4a + a$ vorkäme. Auch können bisweilen zwey oder mehrere Glieder in eines gebracht werden, wie z. E.

$$3a + 2a = 5a,\; 7b - 3b = +4b,\; -6c + 10c = +4c$$
$$5a - 8a = -3a,\; -7b + b = -6b,\; 3c - 4c = -7c$$
$$2a - 5a + a = -2a,\; -3b - 5b + 2b = -6b.$$

Diese Abkürzung findet also statt, so oft zwey oder mehr Glieder in Ansehung der Buchstaben völlig einerley sind. Hingegen $2a^2 + 3a$ läßt sich nicht zusammen ziehen und $2b^3 - b^4$ läßt sich auch nicht abkürzen.

262.

Wir wollen also einige Exempel von dieser Art betrachten. Erstlich sollen diese zwey Formeln addirt werden $a+b$ und $a-b$, da denn nach obiger Regel heraus kommt $a+b+a-b$, nun aber ist $a+a=2a$ und $b-b=0$, folglich ist die Summe $=2a$; welches Exempel folgende sehr nützliche Wahrheit anzeiget.

Wenn zu der Summe zweyer Zahlen $(a+b)$ ihre Differenz $(a-b)$ addirt wird, so kommt die größere Zahl doppelt heraus.

Man betrachte noch folgende Exempel:

$3a-2b-c$	$a^3-2aab+2abb$
$5b-6c+a$	$-aab+2abb-b^3$
$4a+3b-7c$	$a^3-3aab+4abb-b^3$.

Capitel 2.

Von der Subtraction mit zusammengesetzten Größen.

263.

Wenn man die Subtraction nur andeuten will, so schließt man eine jede Formel in Klammern ein, und diejenige, welche abgezogen werden soll, wird mit Vorsetzung des Zeichen $-$ an diejenige angehänget, von welcher sie abgezogen werden soll. Also, wenn von dieser Formel $a-b+c$ diese $d-e+f$ abgezogen werden soll, so wird der gesuchte Rest also angedeutet

$$(a-b+c)-(d-e+f)$$

als woraus deutlich zu ersehen, daß die letztere Formel von der ersten abgezogen werden soll.

264.

264.

Um aber die Subtraction wirklich zu vollziehen, so ist vor das erste zu merken, daß, wenn von einer Größe als a eine andere positive Größe als + b abgezogen werden soll, so wird man bekommen a − b;

Wenn aber eine negative Zahl als − b von a abgezogen werden soll, so wird man bekommen a + b, weil eine Schuld wegnehmen, eben so viel ist als etwas schenken.

265.

Laßt uns nun setzen, man soll von dieser Formel a − c diese b − d subtrahiren; so nehme man erstlich b weg, da bekommt man a − c − b; wir haben aber zu viel weg genommen, denn wir sollten nur b − d weg nehmen, und das um d zu viel: wir müssen also dieses d wieder hinzu setzen, da wir denn erhalten

$$a - c - b + d,$$

woraus sich diese Regel offenbar ergiebt, daß die Glieder derjenigen Formel, welche subtrahirt werden sollen, mit verkehrten Zeichen hinzu geschrieben werden müssen.

266.

Durch Hülfe dieser Regel ist es also ganz leicht, die Subtraction zu verrichten, indem die Formel, von welcher subtrahirt werden soll, ordentlich hin geschrieben, diejenige Formel aber, welche subtrahirt werden soll, mit verkehrten oder verwechselten Zeichen angehänget wird. Also im ersten Exempel, da von a − b + c diese Formel d − e + f abgezogen werden soll, so bekommt man:

$$a - b + c - d + e - f.$$

Um dieses mit puren Zahlen zu erläutern, so subtrahire man von 9 − 3 + 2 diese Formel 6 − 2 + 4, da bekommt man

$$9 - 3 + 2 - 6 + 2 - 4 = 0.$$

welches auch so gleich in die Augen fällt; denn

$$9-3+2=8,\ 6-2+4=8,\ \text{und}\ 8-8=0.$$

267.

Da nun die Subtraction selbst weiter keine Schwierigkeit hat, so ist nur noch übrig zu bemerken, daß, wenn in dem gefundenen Rest zwey oder mehr Glieder vorkommen, welche in Ansehung der Buchstaben einerley sind, die Abkürzung nach eben denselben Regeln vorgenommen werden könne, welche oben bey der Addition gegeben worden.

268.

Es soll von $a+b$, wodurch die Summe zweyer Zahlen angedeutet wird, ihre Differenz $a-b$ subtrahirt werden, so bekommt man erstlich, $a+b-a+b$; nun aber ist $a-a=0$ und $b+b=2b$, folglich ist der gesuchte Rest $2b$, das ist die kleinere Zahl b doppelt genommen.

269.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Exempel beyfügen:

$$\begin{array}{c|c} aa+ab+bb & 3a-4b+5c \\ bb-ab+aa & 2b+4c-6a \\ \hline 2ab & 9a-6b+c \end{array}$$

$$\begin{array}{c} a^3+3aab+3abb+b^3 \\ a^3-3aab+3abb-b^3 \\ \hline 6aab+2b^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{a}+2\sqrt{b} \\ \sqrt{a}-3\sqrt{b} \\ \hline +5\sqrt{b} \end{array}$$

Capitel 3.

Von der Multiplication mit zusammengesetzten Größen.

270.

Wenn eine solche Multiplication nur soll angezeigt werden, so wird eine jede von den Formeln, welche mit einander multipliciret werden sollen, in Klammern eingeschlossen, und entweder ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesetzten Punkt an einander gehängt.

Also wenn diese beyde Formeln $a-b+c$ und $d-e+f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product solcher Gestalt anzeiget:

$$(a-b+c).(d-e+f) \text{ oder } (a-b+c)(d-e+f).$$

Diese Art wird sehr häufig gebraucht, weil man daraus so gleich sieht, aus was für Factoren ein solches Product zusammen gesetzt ist.

271.

Um aber zu zeigen, wie eine solche Multiplication wirklich angestellt werden müsse, so ist erstlich zu merken, daß wenn eine solche Formel $a-b+c$ z. E. mit 2 multiplicirt werden soll, ein jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden müsse, und also herauskomme

$$2a-2b+2c.$$

Eben dieses gilt auch von allen andern Zahlen. Wenn also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll, so bekommt man:

$$ad-bd+cd.$$

272.

Hier haben wir voraus gesetzt, daß die Zahl d positiv sey: wenn aber mit einer Negativzahl als $-e$ multiplicirt werden soll, so ist die oben gegebene Regel zu beobachten, daß nämlich zwey ungleiche Zeichen multiplicirt $-$, zwey gleiche aber $+$ geben. Daher bekommt man:

$$-ae + be - ce.$$

273.

Um nun zu zeigen, wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt seyn, als A, durch eine zusammengesetzte als $d - e$ multiplicirt werden soll, so wollen wir erstlich pure Zahlen betrachten, und annehmen, daß A mit $7 - 3$ multiplicirt werden soll. Hier ist nun klar, daß man das vierfache von A verlange: nimmt man nun erstlich das siebenfache, so muß man hernach das dreyfache davon subtrahiren. Also auch überhaupt, wenn man mit $d - e$ multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hernach mit e, und subtrahirt das letztere Product von dem ersteren, also, daß heraus kommt $dA - eA$. Laßt uns nun setzen $A = a - b$, welches mit $d - c$ multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} dA = ad - bd \\ eA = ae - be \\ \hline \qquad ad - bd - ae + be \end{array}$$

welches das verlangte Product ist.

274.

Da wir nun das Product $(a - b).(d - e)$ gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplicationsexempel folgendergestalt deutlicher vor Augen stellen:

$$\begin{array}{l} a - b \\ d - e \\ \hline ad - bd - ae + be \end{array}$$

wor-

woraus wir sehen, daß ein jedes Glied der obern Formel mit einem jeglichen der untern multiplicirt werden müsse, und daß wegen der Zeichen die oben gegebene Regel gänzlich Statt habe, und hierdurch von neuem bestätiget werde, wenn etwann jemand noch irgend einen Zweifel darüber gehabt hätte.

275.

Nach dieser Regel wird es also leicht seyn, folgendes Exempel auszurechnen; $a+b$ soll multiplicirt werden mit $a-b$:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline aa + ab \\ \quad - ab - bb \\ \hline \end{array}$$

das Product wird seyn $aa-bb$

276.

Wenn also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so leitet uns dieses Exempel auf folgende Wahrheit: Wenn die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt wird, so ist das Product die Differenz ihrer Quadraten, welches also kann vorgestellt werden:

$$(a+b)(a-b) = aa - bb.$$

Folglich ist hinwiederum die Differenz zwischen zwey Quadratzahlen immer ein Product, oder sie läßt sich theilen, so wohl durch die Summe als durch die Differenz der Wurzel, und ist also keine Primzahl.

277.

Laßt uns noch ferner folgende Exempel ausrechnen;

I.)
$$\begin{array}{rrr} 2a & -3 & \\ a & +2 & \\ \hline 2aa & -3a & \\ & +4a & -6 \\ \hline 2aa & +a & -6 \end{array}$$

II.)
$$\begin{array}{rrrr} 4aa & -6a & +9 & \\ 2a & +3 & & \\ \hline 8a^3 & -12aa & +18a & \\ & +12aa & -18a & +27 \\ \hline 8a^3 & & & +27 \end{array}$$

III.)
$$\begin{array}{rrrr} 3aa & -2ab & -bb & \\ 2a & -4b & & \\ \hline 6a^3 & -4aab & -2abb & \\ & -12aab & +8abb & +4b^3 \\ \hline 6a^3 & -16aab & +6abb & +4b^3 \end{array}$$

IV.)
$$\begin{array}{rrrrr} aa & +2ab & +2bb & & \\ aa & -2ab & +2bb & & \\ \hline a^4 & +2a^3b & +2aabb & & \\ & -2a^3b & -4aabb & -4ab^3 & \\ & & +2aabb & +4ab^3 & +4b^4 \\ \hline a^4 & & & & +4b^4. \end{array}$$

V.)
$$\begin{array}{rrrrr} 2aa & -3ab & -4bb & & \\ 3aa & -2ab & +bb & & \\ \hline 6a^4 & -9a^3b & -12aabb & & \\ & -4a^3b & +6aabb & +8ab^3 & \\ & & +2aabb & -3ab^3 & -4b^4. \\ \hline 6a^4 & -13a^3b & -4aabb & +5ab^3 & -4b^4. \end{array}$$

VI.)
$$\begin{array}{l} aa+bb+cc-ab-ac-bc \\ a+b+c \\ \hline a^3+abb+acc-aab-aac-abc \\ \quad -abb-acc+aab+aac-abc+b^3+bcc-bbc \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -abc \quad -bcc+bbc+c^3 \\ \hline a^3-3abc+b^3+c^3. \end{array}$$

278.

Wenn mehr als zwey Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht, daß nachdem man zwey davon mit einander multiplicirt, das

Product

Product nach und nach auch durch die übrigen multiplicirt werden müsse, und daß es gleich viel sey, was man für eine Ordnung darinn beobachtet. Es soll z. E. folgendes Product, so aus vier Factores besteht, gefunden werden:

$$\begin{matrix} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ (a+b) & (aa+ab+bb) & (a-b) & (aa-ab+bb) \end{matrix}$$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

$$\begin{array}{ll} \text{II.} & aa + ab + bb \\ \text{I.} & a + b \\ \hline & a^3 + aab + abb \\ & \quad + aab + abb + a^3 \\ \hline \text{I. II.} & a^3 + 2aab + 2abb + b^3 \end{array}$$

Hernach multiplicirt man den III. und IV. Factor:

$$\begin{array}{ll} \text{IV.} & aa - ab + bb \\ \text{III.} & a - b \\ \hline & a^3 - aab + abb \\ & \quad - aab + abb - b^3 \\ \hline \text{III. IV.} & a^3 - 2aab + 2abb - b^3 \end{array}$$

Nun ist also noch übrig jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren,

$$\begin{array}{l} \text{I. II.} = a^3 + 2aab + 2abb + b^3 \\ \text{III. IV.} = a^3 - 2aab + 2abb - b^3 \\ \hline a^6 + 2a^5b + 2a^4bb + a^3b^3 \\ \quad - 2a^5b - 4a^4bb - 4a^3b^3 - 2aab^4 \\ \quad\quad + 2a^4bb + 4a^3b^3 + 4aab^4 + 2ab^5 \\ \quad\quad\quad - a^3b^3 - 2aab^4 - 2ab^5 - b^6 \\ \hline a^6 - b^6. \end{array}$$

dieses ist nun das gesuchte Product:

279.

Laßt uns nun bey eben diesem Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und sodann die II. mit der IV. multipliciren:

$$\begin{array}{l} \text{I. } a + b \\ \text{III. } a - b \\ \hline aa + ab \\ \quad - ab - bb \\ \hline \text{I. III.} = aa - bb \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{II. } aa + ab + bb \\ \text{IV. } aa - ab + bb \\ \hline a^4 + a^3b + aabb \\ \quad - a^3b - aabb - ab^3 \\ \quad\quad + aabb + ab^3 + b^4 \\ \hline \text{II. IV.} = a^4 + aabb + b^4 \end{array}$$

Nun ist noch übrig das Product II. IV. mit dem I. III. zu multipliciren:

$$\begin{array}{l} \text{II. IV.} = a^4 + aabb + b^4 \\ \text{I. III.} = aa - bb \\ \hline a^6 + a^4bb + aab^4 \\ \quad - a^4bb - aab^4 - b^6 \\ \hline a^6 - b^6 \end{array}$$

welches das gesuchte Product ist.

280.

Wir wollen die Rechnung noch nach einer andern Ordnung anstellen, und erstlich die I. Formel mit der IV. und hernach die II. mit der III. multipliciren,

$$\begin{array}{l} \text{IV. } aa - ab + bb \\ \text{I. } a + b \\ \hline a^3 - aab + abb \\ \quad + aab - abb + b^3 \\ \hline \text{I. IV.} = a^3 + b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{II. } aa + ab + bb \\ \text{III. } a - b \\ \hline a^3 + aab + abb \\ \quad - aab - abb - b^3 \\ \hline \text{II. III.} = a^3 - b^3 \end{array}$$

Nun

Nun ist noch übrig das Product I. IV. mit II. III. zu multipliciren

$$\begin{array}{ll} \text{I. IV.} & = a^3 + b^3 \\ \text{II. III.} & = a^3 - b^3 \\ \hline & a^6 + a^3b^3 \\ & \quad\; - a^3b^3 - b^6 \\ \hline & a^6 - b^6 \end{array}$$

281.

Es ist der Mühe werth, dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sey daher $a=3$ und $b=2$; so hat man $a+b=5$ und $a-b=1$; ferner $aa=9$, $ab=6$, $bb=4$. Also ist $aa+ab+bb=19$, und $aa-ab+bb=7$. Folglich wird dieses Product verlangt:

5. 19. 1. 7. welches ist 665.

Es ist aber $a^6=729$ und $b^6=64$, folglich $a^6-b^6=665$, wie wir schon gesehen haben.

Capitel 4.

Von der Division mit zusammengesetzten Größen.

282.

Wenn man die Division nur anzeigen will, so bedient man sich, entweder des gewöhnlichen Zeichens eines Bruchs, indem man das Dividend über die Linie und den Divisor unter die Linie schreibt: oder man schließt beyde in Klammern ein, und schreibt den Divisor nach dem Dividend mit darzwischen gesetzten zwey Puncten. Also, wenn $a+b$ durch $c+d$ ge-

theilt werden soll, so wird der Quotient nach der ersten Art also angezeigt $\frac{a+b}{c+d}$.

Nach der andern Art aber also $(a+b):(c+d)$; beydes wird ausgesprochen $a+b$ getheilt durch $c+d$.

283.

Wenn eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden soll, so wird ein jedes Glied besonders getheilt, z. E.

$6a-8b+4c$ durch 2 getheilt, giebt $3a-4b+2c$
und $(aa-2ab):(a)=a-2b$:
Eben so $(a^3-2aab+3abb):(a)=aa-2ab+3bb$:
ferner $(4aab-6aac+8abc):(2a)=2ab-3ac+4bc$:
und $(9aabc-12abbc+15abcc):(3abc)=3a-4b+5c$ rc.

284.

Wenn sich etwann ein Glied des Dividends nicht theilen läßt, so wird der daher entstehende Quotient durch einen Bruch angezeigt. Also wenn $a+b$ durch a getheilt werden soll, so bekommt man zum Quotient $1+\frac{b}{a}$.

Ferner $(aa-ab+bb):(aa)=1-\frac{b}{a}+\frac{bb}{aa}$.

Wenn weiter $(2a+b)$ durch 2 getheilt werden soll, so bekommt man $a+\frac{b}{2}$; wobey zu merken, daß anstatt $\frac{b}{2}$ auch geschrieben werden kann $\frac{1}{2}b$, weil $\frac{1}{2}$ mal b so viel ist als $\frac{b}{2}$. Eben so ist $\frac{b}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}b$, und $\frac{2b}{3}$ so viel als $\frac{2}{3}b$ rc.

285.

285.

Wenn aber der Divisor selbst eine zusammengesetzte Größe ist, so hat die Division mehr Schwierigkeit, weil dieselbe öfters wirklich geschehen kann, wo es nicht zu vermuthen scheint; denn wenn die Division nicht angeht, so muß man sich begnügen, den Quotienten, wie oben gemeldet, durch einen Bruch anzudeuten; wir wollen daher hier nur solche Fälle betrachten, wo die Division wirklich angeht.

286.

Es soll demnach das Dividend $ac - bc$ durch den Divisor $a - b$ getheilet werden: der Quotient muß demnach also beschaffen seyn, daß, wenn der Divisor $a - b$ damit multiplicirt wird, das Dividend $ac - bc$ herauskomme. Man sieht nun leicht, daß in dem Quotus c stehen muß, weil sonsten nicht ac herauskommen könnte. Um nun zu sehen, ob c der völlige Quotus ist, so darf man nur den Divisor damit multipliciren, und sehen, ob das ganze Dividend herauskomme oder nur ein Theil desselben? In unserm Falle aber, wenn $a - b$ mit c multiplicirt wird, so bekommen wir $ac - bc$, welches das Dividend selbst ist: folglich ist c der völlige Quotus. Eben so ist klar, daß $(aa + ab) : (a + b) = a$, und $(3aa - 2ab) : (3a - 2b) = a$, ferner $(6aa - 9ab) : (2a - 3b) = 3a$.

287.

Auf solche Art findet man gewiß einen Theil des Quotienten. Denn wenn derselbe mit dem Divisor multiplicirt noch nicht das Dividend erschöpft, so muß man das übrige gleichfalls noch durch den Divisor theilen, da man denn wiederum einen Theil des Quotienten herausbringt. Solchergestalt verfährt man bis man den ganzen Quotient erhalte.

Wir

Wir wollen z. E. $aa + 3ab + 2bb$ durch $a + b$ theilen; da ist nun sogleich klar, daß der Quotient das Glied a enthalten müsse, weil sonst nicht aa herauskommen könnte. Wenn aber der Divisor $a + b$ mit a multiplicirt wird, so kömmt $aa + ab$, welches vom Dividend abgezogen $2ab + 2bb$ nachläßt, welches also noch durch $a + b$ getheilet werden muß, wo sogleich in die Augen fällt, daß im Quotient $2b$ stehen müsse. Nun aber $2b$ mit $a + b$ multiplicirt, giebt just $2ab + 2bb$; folglich ist der gesuchte Quotient $a + 2b$, welcher mit dem Divisor $a + b$ multiplicirt das Dividend giebt. Diese ganze Operation wird folgender Gestalt vorgestellet

$$
\begin{array}{l}
a + b)\ aa + 3ab + 2bb\ (a + 2b \\
\qquad aa + ab \\
\hline
\qquad\quad + 2ab + 2bb \\
\qquad\quad + 2ab + 2bb \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

288.

Um diese Operation zu erleichtern, so erwählet man einen Theil des Divisors, als wie hier geschehen, a, welchen man zuerst schreibt, und nach diesem Buchstaben schreibt man auch das Dividend in solcher Ordnung, daß die höchsten Potestäten von eben demselben Buchstaben a zuerst gesetzt werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$
\begin{array}{l}
a - b)\ a^3 - 3aab + 3abb - b^3\ (aa - 2ab + bb \\
\qquad a^3 - aab \\
\hline
\qquad - 2aab + 3abb \\
\qquad - 2aab + 2abb \\
\hline
\qquad\qquad + abb - b^3 \\
\qquad\qquad + abb - b^3 \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$a+b)\ aa-bb\ (a-b$$
$$aa+ab$$
$$-ab-bb$$
$$-ab-bb$$
$$0$$

$$3a-2b)\ 18aa-8bb\ (6a+4b$$
$$18aa-12ab$$
$$+12ab-8bb$$
$$+12ab-8bb$$
$$0$$

$$a+b)\ a^3+b^3\ (aa-ab+bb$$
$$a^3+aab$$
$$-aab+b^3$$
$$-aab-abb$$
$$+abb+b^3$$
$$+abb+b^3$$
$$0$$

$$2a-b)\ 8a^3-b^3\ (4aa+2ab+bb$$
$$8a^3-4aab$$
$$+4aab-b^3$$
$$+4aab-2abb$$
$$+2abb-b^3$$
$$+2abb-b^3$$
$$0$$

$$aa-2ab+bb)\ a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4\ (aa-2ab+bb$$
$$a^4-2a^3b+aabb$$
$$-2a^3b+5aabb-4ab^3$$
$$-2a^3b+4aabb-2ab^3$$
$$+aabb-2ab^3+b^4$$
$$+aabb-2ab^3+b^4$$
$$0$$

$$aa-2ab+4bb)\ a^4+4aabb+16b^4\ (aa+2ab+4bb$$
$$a^4-2a^3b+4aabb$$
$$+2a^3b+16b^4$$
$$+2a^3b-4aabb+8ab^3$$
$$+4aabb-8ab^3+16b^4$$
$$+4aabb-8ab^3+16b^4$$
$$0$$

aa − 2ab

$$
\begin{array}{l}
aa - 2ab + 2bb)\ a^4 + 4b^4\ (aa + 2ab + 2bb \\
\qquad\qquad a^4 + 2a^3b + 2aabb \\
\qquad\qquad\quad + 2a^3b - 2aabb + 4b^4 \\
\qquad\qquad\quad + 2a^3b - 4aabb + 4ab^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 2aabb - 4ab^3 + 4b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + 2aabb - 4ab^3 + 4b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
-2x+xx)\ 1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5\ (1-3x+3xx-x^3 \\
\qquad 1-2x+xx \\
\qquad\ -3x+9xx-10x^3 \\
\qquad\ -3x+6xx-3x^3 \\
\qquad\qquad +3xx-7x^3+5x^4 \\
\qquad\qquad +3xx-6x^3+3x^4 \\
\qquad\qquad\qquad -x^3+2x^4-x^5 \\
\qquad\qquad\qquad -x^3+2x^4-x^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Capitel 5.

Von der Auflösung der Brüche in unendlichen Reihen.

289.

Wenn sich das Dividend durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeiget, durch einen Bruch ausgedrückt.

Also, wenn 1 durch $1-a$ getheilet werden soll, so bekömmt man diesen Bruch $\frac{1}{1-a}$. Inzwischen kann doch die Division nach den vorhergehenden Regeln angestellet und so weit man will fortgesetzt werden, da

denn

denn immer der wahre Quotus, ob gleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß.

290.

Um dieses zu zeigen, so laßt uns das Dividend 1, wirklich durch den Divisor $1-a$ theilen, wie folget:

$$1-a)\ 1\ (1+\frac{a}{1-a} \quad \text{oder} \quad 1-a)\ 1\ (1+a+\frac{aa}{1-a}$$

$$\begin{array}{r} +1-a \\ \hline \text{Rest} +a \end{array} \qquad \begin{array}{r} +1-a \\ \hline +a \\ +a-aa \\ \hline \text{Rest} +aa \end{array}$$

Um noch mehr Formen zu finden, so theile man aa durch $1-a$, als

$$1-a)\ aa\ (aa+\frac{a^3}{1-a}, \quad \text{ferner}\ 1-a)\ a^3\ (a^3+\frac{a^4}{1-a}$$

$$\begin{array}{r} aa-a^3 \\ \hline +a^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^3-a^4 \\ \hline +a^4 \end{array}$$

$$\text{ferner}\ 1-a)\ a^4\ (a^4+\frac{a^5}{1-a}$$

$$\begin{array}{r} a^4-a^5 \\ \hline +a^5 \end{array} \text{ ꝛc.}$$

291.

Hieraus ersehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ durch alle folgende Formen ausgedrückt werden kann,

I.) $1+\frac{a}{1-a}$ II.) $1+a+\frac{aa}{1-a}$,

III.) $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, IV.) $1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a}$,

V.) $1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}$, ꝛc.

Man

Man betrachte die erste Form $1 + \frac{a}{1-a}$. Nun ist 1, so viel, als $\frac{1-a}{1-a}$: folglich $1 + \frac{a}{1-a} = \frac{1-a}{1-a} + \frac{a}{1-a} = \frac{1-a+a}{1-a} = \frac{1}{1-a}$.

Für die zweyte Form $1 + a + \frac{aa}{1-a}$ bringe man den ganzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekömmt man $\frac{1-aa}{1-a}$, darzu $\frac{+aa}{1-a}$ giebt $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$.

Für die dritte Form $1 + a + aa + \frac{a^3}{1-a}$, giebt der ganze Theil zum Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$, darzu der Bruch $\frac{a^3}{1-a}$ macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellet, daß alle diese Formen in der That so viel sind, als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

292.

Man kann daher solcher Gestalt so weit fortgehen, als man will, ohne daß man weiter nöthig habe zu rechnen. Also wird seyn $\frac{1}{1-a} = 1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + \frac{a^8}{1-a}$. Man kann auch so gar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset, welche ist:

$$1 + a + aa + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}, \text{ꝛc.}$$

ins

ins Unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit Recht behaupten, daß ihr Werth eben so viel sey, als der Bruch $\frac{1}{1-a}$.

293.

Dieses scheint anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden: Es sey erstlich a = 1, so wird unsere Reihe $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ꝛc. bis ins Unendliche, welche dem Bruche $\frac{1}{1-1}$, das ist $\frac{1}{0}$, gleich seyn soll. Wir haben aber schon oben bemerket, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das schönste bestätiget.

Wenn man aber setzet a = 2, so wird unsere Reihe $= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ ꝛc. bis ins unendliche, deren Werth seyn soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1} = -1$; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es ist aber zu merken, daß, wenn man irgendwo in obiger Reihe will stehen bleiben, darzu allezeit noch ein Bruch gesetzt werden muß.

Also, wenn wir z. E. bey 64 still stehen, so müssen wir zu $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$ noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{-1} = -128$ hinzusetzen, woraus entsteht $127 - 128$, das ist -1.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man steht aber hingegen auch niemals still.

294.

Dieses ist demnach zu beobachten, wenn für a größere Zahlen als 1 angenommen werden. Nimmt man aber für a kleinere Zahlen, so läßt sich alles leichter begreifen.

Es sey z. E. $a = \frac{1}{2}$, so bekömmt man $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ $= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, welches folgender Reihe gleich seyn wird:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$, ꝛc. ohne Ende. Denn nimmt man nur zwey Glieder, so hat man $1 + \frac{1}{2}$, und so fehlet noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlet noch $\frac{1}{4}$: nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{7}{8}$, fehlet noch $\frac{1}{8}$: woraus man sieht, daß immer weniger fehlet, folglich, wenn man unendlich weit fortgeht, so muß gar nichts fehlen.

295.

Man setze $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$ $= \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, welchem daher folgende Reihe gleich ist $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$, ꝛc. bis ins Unendliche. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlet noch $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{4}{9}$, fehlet noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlet noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreymal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

296.

Laßt uns setzen $a = \frac{2}{3}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-a}$ $+ \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, die Reihe aber wird:

$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$, ꝛc. bis ins Unendliche.

Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$, so fehlet noch $1\frac{1}{3}$.

Nimmt man drey Glieder $2\frac{1}{9}$, so fehlet noch $\frac{8}{9}$.

Nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$, so fehlet noch $\frac{16}{27}$.

297. Es

297.

Es sey $a = \frac{1}{4}$, so wird der Bruch $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$, die Reihe aber wird $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ ꝛc. Nimmt man zwey Glieder $1\frac{1}{4}$, so fehlet noch $\frac{1}{12}$; nimmt man drey Glieder, so hat man $1\frac{5}{16}$, fehlet noch $\frac{1}{48}$, ꝛc.

298.

Auf gleiche Weise kann auch dieser Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset werden, wenn man den Zähler 1 durch den Nenner $1 + a$ wirklich dividirt, wie folget:

$$
\begin{array}{l}
1+a)\ 1\ (1 - a + aa - a^3 + a^4 \\
\underline{1 + a} \\
\quad - a \\
\quad \underline{- a - aa} \\
\qquad + aa \\
\qquad \underline{+ aa + a^3} \\
\qquad\quad - a^3 \\
\qquad\quad \underline{- a^3 - a^4} \\
\qquad\qquad + a^4 \\
\qquad\qquad \underline{+ a^4 + a^5} \\
\qquad\qquad\quad - a^5 \text{ ꝛc.}
\end{array}
$$

Daher ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe:

$$1 - a + aa - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7, \text{ ꝛc.}$$

299.

Setzet man $a = 1$, so erhält man diese merkwürdige Vergleichung:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ ꝛc.}$$

bis ins Unendliche; welches wiedersinnig scheint: denn wenn man irgendwo mit -1 aufhöret, so giebt diese Reihe 0; höret man irgend aber mit $+1$ auf, so giebt dieselbe 1. Allein, eben hieraus läßt sich die Sache begreifen, weil, wenn man ohne Ende fortgehen, und weder bey -1 noch $+1$ irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 herauskommen, sondern etwas darzwischen, welches $\frac{1}{2}$ ist.

300.

Es sey ferner $a = \frac{1}{2}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, welchen folglich gleich seyn wird diese Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ ꝛc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{1}{2}$, ist zu wenig um $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{3}{4}$, ist zu viel um $\frac{1}{12}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{5}{8}$, ist zu wenig um $\frac{1}{24}$, ꝛc.

301.

Setzet man $a = \frac{1}{3}$, so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, welchem folglich diese Reihe wird gleich seyn $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$ ꝛc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drey Glieder, so man man $\frac{7}{9}$, ist zu viel um $\frac{1}{36}$. Nimmt man vier Glieder, so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$, und so fort.

302.

Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ auf noch eine andere Art auflösen, indem man 1 durch a + 1 theilet, nämlich:

$$a+1)\ 1\ \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}\ \text{rc.}\right.$$

$$1 + \frac{1}{a}$$

$$\overline{\quad - \frac{1}{a}\quad}$$

$$- \frac{1}{a} - \frac{1}{aa}$$

$$\overline{\quad + \frac{1}{aa}\quad}$$

$$+ \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3}$$

$$\overline{\quad - \frac{1}{a^3}\quad}$$

$$- \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4}$$

$$\overline{\quad + \frac{1}{a^4}\quad}$$

$$+ \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}$$

$$\overline{\quad - \frac{1}{a^6}\ \text{rc.}\quad}$$

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich $\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6}$ ꝛc. ohne Ende:

Setzet man $a = 1$, so bekömmt man diese Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \text{ ꝛc.} = \tfrac{1}{2}, \text{ wie oben:}$$

Setzet man $a = 2$, so bekömmt man diese Reihe

$$\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} - \tfrac{1}{64}, \text{ ꝛc.}$$

303.

Auf gleiche Weise kann man auf eine allgemeine Art diesen Bruch $\frac{c}{a+b}$ in einer Reihe auflösen,

$$a + b)\ c\ (\frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} \text{ ꝛc.}$$

$$c + \frac{bc}{a}$$

$$\overline{\quad - \frac{bc}{a} \quad}$$

$$- \frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa}$$

$$\overline{\quad + \frac{bbc}{aa} \quad}$$

$$+ \frac{bbc}{aa} + \frac{b^3c}{a^3}$$

$$\overline{\quad - \frac{b^3c}{a^3} \quad}$$

Woraus

Woraus wir diese Vergleichung erhalten $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4}$ bis ins Unendliche:

Es sey a = 2, b = 4 und c = 3, so haben wir $\frac{c}{a+b}$ $\frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12$ ꝛc.

Es sey a=10, b=1 und c=11, so haben wir $\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1}$ $= 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000}$ ꝛc.

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$, welches zu viel um $\frac{1}{10}$. Nimmt man zwey Glieder, so hat man $\frac{99}{100}$, welches zu wenig um $\frac{1}{100}$. Nimmt man drey Glieder, so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ ꝛc.

304.

Wenn der Divisor aus mehr Theilen besteht, so kann die Division gleicher Gestalt ins Unendliche fortgesetzt werden.

Als wenn dieser Bruch $\frac{1}{1-a+aa}$ vorgegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, so demselben gleich ist, also gefunden:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
1 - a + aa) & 1 & (1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 \text{ ꝛc.} \\
& \underline{1 - a + aa} \\
& \quad + a - aa \\
& \quad \underline{+ a - aa + a^3} \\
& \qquad\qquad - a^3 \\
& \qquad\qquad \underline{- a^3 + a^4 - a^5} \\
& \qquad\qquad\qquad - a^4 + a^5 \\
& \qquad\qquad\qquad \underline{- a^4 + a^5 - a^6} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + a^6 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+ a^6 - a^7 + a^8} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + a^7 - a^8 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+ a^7 - a^8 + a^9} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a^9 \text{ ꝛc.}
\end{array}
$$

Daher haben wir diese Vergleichung $\frac{1}{1-a+aa} = 1 + a - a^3 - a^4 + a^6 + a^7 - a^9 - a^{10}$ ꝛc. ohne Ende. Nimmt man hier $a = 1$, so bekommt man diese Reihe $1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1$ ꝛc. welche Reihe die schon oben gefundene $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ ꝛc. gedoppelt in sich enthält, da nun die obige Reihe dem $\frac{1}{2}$ gleich war, so ist kein Wunder, daß diese $\frac{2}{2}$, das ist 1, ausmacht.

Setzt man $a = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese Gleichung $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512}$ ꝛc. Setzt man $a = \frac{1}{3}$, so bekommt man diese Gleichung, als $\frac{1}{\frac{7}{9}}$ oder $\frac{9}{7} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{729}$ ꝛc. Nimmt man hier vier Glieder, so bekommt man $\frac{104}{81}$, welches kleiner ist als $\frac{9}{7}$ um $\frac{1}{567}$.

Man setze ferner $a =$ [illegible], so bekommt man diese Gleichung $\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \frac{64}{729}$ ꝛc. welche Reihe

der

der vorigen gleich seyn muß; man subtrahire also die obere von dieser, so bekommt man:

$0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ rc. welche vier Glieder machen $-\frac{2}{81}$.

305.

Solchergestalt kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflösen, welches nicht nur öfters sehr großen Nutzen schafft, sondern auch an sich selbst höchst merkwürdig ist, daß eine unendliche Reihe, ungeachtet dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Erfindungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, daher diese Materie allerdings verdient, mit der größten Aufmerksamkeit in Erwägung gezogen zu werden.

Capitel 6.

Von den Quadraten der zusammengesetzten Größen.

306.

Wenn das Quadrat von einer zusammengesetzten Größe gefunden werden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbst multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von $a + b$ gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{rrr} a & + b & \\ a & + b & \\ \hline aa & + ab & \\ & + ab & + bb \\ aa & + 2ab & + bb \end{array}$$

307.

Wenn daher die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a + b$, so besteht das Quadrat I. aus den Quadraten eines jeden Theils, nämlich aa und bb, II. kommt aber noch hinzu das doppelte Product der beyden Theile, nämlich $2ab$, und die ganze Summe $aa + 2ab + bb$ ist das Quadrat von $a + b$.

Es sey z. E. $a = 10$ und $b = 3$, also, daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; solches wird demnach seyn $= 100 + 60 + 9 = 169$.

308.

Durch Hülfe dieser Formel lassen sich nun leicht die Quadraten von ziemlich großen Zahlen finden, wenn dieselben in zwey Theile zergliedert werden.

Also um das Quadrat von 57 zu finden, so zertheile man diese Zahl in $50 + 7$; daher das Quadrat seyn wird:

$$2500 + 700 + 49 = 3249.$$

309.

Hieraus sieht man, daß das Quadrat von $a + 1$ seyn werde $aa + 2a + 1$; da nun das Quadrat von a ist aa, so wird das Quadrat von $a + 1$ gefunden, wenn man zu jenem addirt $2a + 1$, wobey zu merken, daß $2a + 1$ die Summe der beyden Wurzeln a und $a + 1$ ist; da also das Quadrat von 10 ist 100, so wird das Quadrat von 11 seyn $= 100 + 21$, und da das Quadrat von 57 ist 3249, so wird das Quadrat von 58 seyn $= 3249 + 115 = 3364$. Und ferner das Quadrat von $59 = 3364 + 117 = 3481$. Noch ferner das Quadrat von $60 = 3481 + 119 = 3600$ rc.

310.

Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a + b$, wird also angedeutet $(a + b)^2$; daher haben wir $(a + b)^2 = aa + 2ab + bb$, woraus folgende Gleichungen hergeleitet worden:

$$(a + 1)^2 = aa + 2a + 1,\quad (a + 2)^2 = aa + 4a + 4,$$
$$(a + 3)^2 = aa + 6a + 9,\quad (a + 4)^2 = aa + 8a + 16,$$

und so ferner.

311.

Wenn die Wurzel ist $a - b$, so wird ihr Quadrat seyn $= aa - 2ab + bb$, welches daher aus den Quadraten beyder Theile besteht, wovon aber das doppelte Product muß weggenommen werden.

Es sey z. E. $a = 10$ und $b = 1$, so wird das Quadrat von 9 seyn $= 100 - 20 + 1 = 81$.

312.

Da wir nun diese Gleichung haben $(a - b)^2 = aa - 2ab + bb$, so wird seyn $(a - 1)^2 = aa - 2a + 1$; Das Quadrat von $a - 1$ wird also gefunden, wenn man von aa subtrahirt $2a - 1$, welches die Summe der beyden Wurzeln a und $a - 1$ ist.

Es sey z. E. $a = 50$, so ist $aa = 2500$ und $a - 1 = 49$, daher $49^2 = 2500 - 99 = 2401$.

313.

Dieses läßt sich auch durch Brüche erläutern, denn wenn man vor die Wurzel nimmt $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ [welches 1 ausmacht] so wird das Quadrat seyn:

$$\tfrac{9}{25} + \tfrac{4}{25} + \tfrac{12}{25} = \tfrac{25}{25} \text{ das ist } 1.$$

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ [welches $\frac{1}{6}$ ist] wird seyn $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

314.

Wenn die Wurzel aus mehr Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen: Also von $a+b+c$ wird das Quadrat gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{l}
\quad a+b+c \\
\quad a+b+c \\
\hline
aa+ab+ac \qquad\quad +bc \\
\quad +ab+ac+bb+bc+cc \\
\hline
\quad aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc
\end{array}$$

woraus man sieht, daß dasselbe erstlich aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel, und hernach aus dem doppelten Product von je zwey Theilen mit einander besteht.

315.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so wollen wir die Zahl 256 in diese drey Theile zertheilen 200 + 50 + 6; daher das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt seyn wird;

$$\begin{array}{r}
40000, \\
2500 \\
36 \\
20000 \\
2400 \\
600 \\
\hline
65536
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
256 \\
256 \\
\hline
1536 \\
1280 \\
512 \\
\hline
65536
\end{array}$$

und dieses ist dem 256. 256 offenbar gleich.

316.

Wenn einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regel gefunden, wenn

wenn man nur bey den doppelten Producten Achtung giebt, was für ein Zeichen einem jeden zukommt.

Also von $a - b - c$ wird das Quadrat seyn:

$$aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc.$$

Wenn also die Zahl 256 also vorgestellet wird $300 - 40 - 4$, so bekommt man:

Positive Theile	Negative Theile
+ 90000	− 24000
1600	2400
320	− 26400
16	
+ 91936	
− 26400	
65536. Quadrat von 256, wie oben.	

Capitel 7.

Von der Ausziehung der Quadratwurzel in zusammengesetzten Größen.

317.

Um hiervon eine sichere Regel zu geben, so müssen wir das Quadrat von der Wurzel $a + b$, welches ist $aa + 2ab + bb$ genau in Erwägung ziehen, und suchen, wie man hinwiederum aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel heraus bringen könne. Worüber folgende Betrachtungen anzustellen sind.

318.

Erstlich, da das Quadrat $aa + 2ab + bb$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel

zel aus mehr als einem Gliede bestehen müsse: und wenn das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potestäten von einem Buchstaben, als a, immer abnehmen, so ist klar, daß das erste Glied das Quadrat seyn werde von dem ersten Glied der Wurzel. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats aa ist, so ist offenbar, daß das erste Glied der Wurzel seyn müsse a.

319.

Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nämlich a gefunden, so betrachte man das übrige im Quadrat, welches ist $2ab + bb$, um zu sehen, wie man daraus den andern Theil der Wurzel, welcher ist b, finden könne. Hiebey bemerken wir, daß jenes übrige oder jener Rest $2ab + bb$ also durch ein Product vorgestellet werden könne $(2a + b)b$. Da nun dieser Rest zwey Factores hat $2a + b$ und b, so wird der letztere b, das ist der zweyte Theil der Wurzel gefunden, wenn man den Rest $2ab + bb$ durch $2a + b$ dividirt.

320.

Um also den zweyten Theil der Wurzel zu finden, so muß man den Rest durch $2a + b$ dividiren, da denn der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn wird. Bey dieser Division aber ist zu merken, daß $2a$ das Doppelte ist von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a: das andere Glied b aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch ledig gelassen werden; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabey nur auf das erste Glied $2a$ gesehen wird. So bald man aber den Quotient gefunden, welcher hier b ist, so muß man denselben auch an die ledige Stelle setzen und die Division vollenden.

321.

Die Rechnung also, wodurch aus obigem Quadrat $aa + 2ab + bb$ die Wurzel gefunden wird, kann also vorgestellt werden:

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa + 2ab + bb \; (a + b \\
 & aa \\
\hline
2a + b & + 2ab + bb \\
 & + 2ab + bb \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

322.

Auf solche Art kann auch die Quadratwurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wenn dieselben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen; als:

$$
\begin{array}{r|l}
 & aa + 6ab + 9bb \; (a + 3b \\
 & aa \\
\hline
2a + 3b & + 6ab + 9bb \\
 & + 6ab + 9bb \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 4aa - 4ab + bb \; (2a - b \\
 & 4aa \\
\hline
4a - b & - 4ab + bb \\
 & - 4ab + bb \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9pp + 24pq + 16qq) \; 3p + 4q \\
 & 9pp \\
\hline
6p + 4q & + 24pq + 16qq \\
 & + 24pq + 16qq \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 25xx - 60x + 36) \; 5x - 6 \\
 & 25xx \\
\hline
10x - 6 & - 60x + 36 \\
 & - 60x + 36 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

323.

Wenn bey der Division noch ein Rest übrig bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als 2 Gliedern besteht. Alsdenn werden die zwey schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das folgende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen;

$$aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc \; (a + b - c$$
$$aa$$
$$2a + b \;|\; + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc$$
$$|\; + 2ab \qquad + bb$$
$$2a + 2b - c \;|\; - 2ac - 2bc + cc$$
$$|\; - 2ac - 2bc + cc$$

$$a^4 + 2a^3 + 3aa + 2a + 1 \; (aa + a + 1$$
$$a^4$$
$$2aa + a \;|\; + 2a^3 + 3aa$$
$$|\; + 2a^3 + aa$$
$$2aa + 2a + 1 \;|\; + 2aa + 2a + 1$$
$$|\; + 2aa + 2a + 1$$

$$a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 \; (aa - 2ab - 2bb$$
$$a^4$$
$$2aa - 2ab \;|\; - 4a^3b + 8ab^3$$
$$|\; - 4a^3b + 4aabb$$
$$2aa - 4ab - 2bb \;|\; - 4aabb + 8ab^3 + 4b^4$$
$$|\; - 4aabb + 8ab^3 + 4b^4$$

$a^6 - 6a^5b$

$$a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6 \, (a^3 - 3aab + 3abb - b^3$$

$$a^6$$

$$2a^3 - 3aab \,|\, -6a^5b + 15a^4bb$$

$$-6a^5b + 9a^4bb$$

$$2a^3 - 6aab + 3abb \,|\, +6a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4$$

$$+6a^4bb - 18a^3b^3 + 9aab^4$$

$$2a^3 - 6aab + 6abb - b^3 \,|\, -2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$-2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$0$$

324.

Aus dieser Regel folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechenbüchern für die Ausziehung der Quadratwurzel gegeben wird; als:

5|29|23,
4
43|129
129
0

17|64|42,
16
82|164
164
0

23|04|48,
16
88|704
704
0

40|96|64,
36
124|496
496
0

96|04|98,
81
188|1504
1504
0

1|56|25|125,
1
22|56
44
245|1225
1225
0

99|80|01|999,
81
189|1880
1701
1989|17901
17901
0

325.

Wenn aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen, daß die vorgelegte Zahl kein Quadrat ist, und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzelzeichens, welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschlossen wird. Also wird die Quadratwurzel von $aa+bb$ auf diese Weise angedeutet, $\sqrt{}(aa+bb)$; und $\sqrt{}(1-xx)$ deutet an die Quadratwurzel aus $1-xx$. Statt dieses Wurzelzeichens kann man auch den gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ gebrauchen. Also wird auch durch $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$ die Quadratwurzel aus $aa+bb$ angedeutet.

Capitel 8.

Von der Rechnung mit Irrationalzahlen.

326.

Wenn zwey oder mehr Irrationalformeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches wie oben gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammen schreibt. Nur ist bey dem Abkürzen zu bemerken, daß anstatt $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ geschrieben werde $2\sqrt{a}$, und daß $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ einander aufhebe, oder nichts gebe. Also diese Formel $3+\sqrt{2}$ und $1+\sqrt{2}$ zusammen addirt, giebt $4+2\sqrt{2}$ oder $4+\sqrt{8}$: ferner $5+\sqrt{3}$ und $4-\sqrt{3}$ zusammen addirt, giebt 9: ferner $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction, indem nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt gelesen werden müssen, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ 1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6} \\ \hline 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6} \end{array}$$

328.

Bey der Multiplication ist nur zu merken, daß $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt, a giebt. Wenn aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{a}$ mit

$\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{ab}$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ +\sqrt{2}+2 \\ \hline 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4+2\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{2} \\ \hline 8+4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2}-4 \\ \hline 8-4=4. \end{array}$$

329.

Eben dieses gilt auch von den unmöglichen Größen; wobey nur zu merken, daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt $-a$ giebt.

Wenn man den Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ suchen sollte, so geschähe solches, wenn man erstlich das Quadrat nimmt, und dasselbe nochmals mit der Zahl $-1+\sqrt{-3}$ multipliciret, wie folgt

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +1-\sqrt{-3} \\ \quad -\sqrt{-3}-3 \\ \hline +1-2\sqrt{-3}-3 = \end{array} \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ -2-2\sqrt{-3} \\ -1+\sqrt{-3} \\ \hline +2+2\sqrt{-3} \\ -2\sqrt{-3}+6 \\ \hline 2+6=8 \end{array}$$

330.

Bey der Division hat man nur nöthig, schlechtweg einen Bruch zu setzen, und alsdenn kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so, daß der Nenner rational wird. Denn, wenn der Nenner ist $a+\sqrt{b}$, und man oben und unten mit $a-\sqrt{b}$, multiplicirt, so wird der neue Nenner seyn $aa-b$, und hat also kein

kein Wurzelzeichen mehr. Man dividire z. E. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$, so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten mit $1-\sqrt{2}$, so bekommt man für den Zähler

$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 3+2\sqrt{2} \\ \quad -3\sqrt{2}-4 \\ \hline 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1 \end{array}$$

für den Nenner

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad -\sqrt{2}-2 \\ \hline 1-2=-1 \end{array}$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1, so bekommt man vor den Zähler $+\sqrt{2}+1$, und vor den Nenner $+1$.

Es ist $+\sqrt{2}+1$ aber eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; denn $\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ \hline 1+\sqrt{2} \\ \quad +\sqrt{2}+2 \\ \hline \text{giebt } 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} \end{array}$$

Ferner $8-5\sqrt{2}$ durch $3-2\sqrt{2}$ dividirt, giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3+2\sqrt{2}$

so bekommt man für den Zähler

$$\begin{array}{l} 8-5\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 24-15\sqrt{2} \\ \underline{\quad +16\sqrt{2}-20} \\ 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

und für den Nenner

$$\begin{array}{l} 3-2\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 9-6\sqrt{2} \\ \underline{\quad +6\sqrt{2}-4.2} \\ 9-8=+1 \end{array}$$

Folglich ist der Quotient $4+\sqrt{2}$. Die Probe stehet also:

$$\begin{array}{l} 4+\sqrt{2} \\ \underline{3-2\sqrt{2}} \\ 12+3\sqrt{2} \\ \underline{\quad -8\sqrt{2}-4} \\ 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2}. \end{array}$$

331.

Auf solche Weise können dergleichen Brüche immer in andere verwandelt werden, wo der Nenner rational ist. Also dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, wenn man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt $\frac{5-2\sqrt{6}}{1}=5-2\sqrt{6}$.

Ferner dieser Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird verwandelt in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4}=\frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$ ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{11+2\sqrt{30}}{1}$ $=11+2\sqrt{30}$.

332.

332.

Wenn in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\surd 10 - \surd 2 - \surd 3}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\surd 10 + \surd 2 + \surd 3$, so hat man $\frac{+\surd 10 + \surd 2 + \surd 3}{5 - 2\surd 6}$: man multipliciret ferner oben und unten mit $5 + 2\surd 6$, so hat man $5\surd 10 + 11\surd 2 + 9\surd 3 + 2\surd 60$.

Capitel 9.

Von den Cubis und von der Ausziehung der Cubicwurzel.

333.

Um den Cubus von der Wurzel $a + b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches ist $aa + 2ab + bb$ nochmals mit $a + b$ multipliciren, da denn der Cubus seyn wird

$$\begin{array}{l} aa + 2ab + bb \\ a + b \\ \hline a^3 + 2aab + abb \\ \quad + aab + 2abb + b^3 \\ \hline a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \end{array}$$

Derselbe besteht also aus den Cubis beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus $3aab + 3abb$, welches so viel ist als $(3ab).(a + b)$: und dieses ist das drey-

fache Product der beyden Theile mit der Summe derselben multiplicirt.

334.

Wenn also die Wurzel aus zwey Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regel leicht finden: als z. E. da die Zahl $5=3+2$, so ist der Cubus davon $=27+8+18.5$ ist also $=125$.

Es sey ferner die Wurzel $7+3=10$, so wird der Cubus seyn $343+27+63.10=1000$.

Um den Cubus von 36 zu finden, so setze man die Wurzel $36=30+6$ und der Cubus wird seyn:

$$27000+216+540.36=46656.$$

335.

Wenn aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nämlich $a^3+3aab+3abb+b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemerken.

Erstlich, wenn der Cubus nach der Potestät eines Buchstaben ordentlich geschrieben wird, so erkennt man aus dem ersten Glied a^3 so gleich das erste Glied der Wurzel a, dessen Cubus jenem gleich ist, und wenn man denselben wegnimmt, so behält man diesen Rest: $3aab+3abb+b^3$, aus welchen das zweyte Glied der Wurzel gefunden werden muß.

336.

Da wir nun schon wissen, daß das zweyte Glied $+b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie dasselbe aus dem obigen Rest gefunden werden könne. Es läßt sich aber derselbe Rest also durch zwey Factores ausdrucken $(3aa+3ab+bb).(b)$; wenn man also den Rest durch $3aa+3ab+bb$ dividirt, so erhält man das verlangte zweyte Glied der Wurzel, nämlich $+b$.

337.

Weil aber das zweyte Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt: Allein es ist genung, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher ist $3aa$, oder das dreyfache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andere Theil b finden, woraus hernach der Divisor vollständig gemacht werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß daher alsdenn zu $3aa$ noch hinzu fügen $3ab$, das ist, das dreyfache Product des ersten Theils mit dem andern, und hernach bb, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

338.

Es sey z. E. gegeben dieser Cubus

$$\begin{array}{r|l}
 & a^3 + 12aa + 48a + 64 \;(a+4 \\
 & a^3 \\
\hline
3aa + 12a + 16 & + 12aa + 48a + 64 \\
 & + 12aa + 48a + 64 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

Es sey ferner gegeben dieser Cubus

$$\begin{array}{r|l}
 & a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \;(aa - 2a + 1 \\
 & a^6 \\
\hline
3a^4 - 6a^3 + 4aa & -6a^5 + 15a^4 - 20a^3 \\
 & -6a^5 + 12a^4 - 8a^3 \\
\hline
3a^4 - 12a^3 + 12aa + 3aa - 6a + 1 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

339.

Hierauf gründet sich auch die gemeine Regel, die Cubicwurzeln aus Zahlen zu finden. Als mit der Zahl 2197 wird die Rechnung also angestellet

```
         2197 (10 + 3 = 13
         1000
        ------
    300 | 1197
     90 |
      9 |
   ---- |
    399 | 1197
        ------
           0
```

Es sey ferner gegeben der Cubus 34965783, woraus die Cubicwurzel gefunden werden soll.

```
             34 965 783 (300 + 20 + 7 = 327
             28 000 000
   270000 |   7 965 783
    18000 |
      400 |
   ------ |
   288400     5 768 000
   ---------------------
   307200 |   2 197 783
     6720 |
       49 |
   ------ |
   313969 |   2 197 783
              ---------
                  0
```

Capitel 10.

Von den höhern Potestäten zusammengesetzter Größen.

340.

Nach den Quadraten und Cubis folgen die höhern Potestäten, welche durch Exponente, wie schon oben gemeldet worden, pflegen angezeigt zu werden: nur

muß

muß man die Wurzel, wenn sie zusammengesetzt ist, in Klammern einschließen. Also $(a+b)^5$ deutet die fünfte Potestät von $a+b$ an, und $(a-b)^6$ deutet die sechste Potestät an von $a-b$. Wie aber diese Potestäten entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeigt werden.

341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potestät, so werden die höhern Potestäten durch die Multiplication folgendergestalt gefunden.

$$
\begin{array}{l}
(a+b)^1 = a+b \\
\quad a+b \\
\hline
\quad aa+ab \\
\quad\quad +ab+bb \\
\hline
(a+b)^2 = aa+2ab+bb \\
\quad a+b \\
\hline
\quad a^3+2aab+abb \\
\quad\quad +aab+2abb+b^3 \\
\hline
(a+b)^3 = a^3+3aab+3abb+b^3 \\
\quad a+b \\
\hline
\quad a^4+3a^3b+3aabb+ab^3 \\
\quad\quad +a^3b+3aabb+3ab^3+b^4 \\
\hline
(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4 \\
\quad a+b \\
\hline
\quad a^5+4a^4b+6a^3bb+4aab^3+ab^4 \\
\quad\quad +a^4b+4a^3bb+6aab^3+4ab^4+b^5 \\
\hline
(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3bb+10aab^3+5ab^4+b^5 \\
\quad a+b \\
\hline
\quad a^6+5a^5b+10a^4bb+10a^3b^3+5aab^4+ab^5 \\
\quad\quad +a^5b+5a^4bb+10a^3b^3+10aab^4+5ab^5+b^6 \\
\hline
(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4bb+20a^3b^3+15aab^4+6ab^5+b^6
\end{array}
$$

2c.

342.

Eben so werden auch die Potestäten von der Wurzel $a-b$ gefunden, welche von den vorigen nur darinn unterschieden sind, daß das 2te, 4te, 6te ꝛc. Glied das Zeichen minus bekömmt, wie aus folgendem zu ersehen.

$$(a-b)^1 = a-b$$
$$a-b$$
$$aa-ab$$
$$-ab+bb$$
$$(a-b)^2 = aa-2ab+bb$$
$$a-b$$
$$a^3-2aab+abb$$
$$-aab+2abb-b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3-3aab+3abb-b^3$$
$$a-b$$
$$a^4-3a^3b+3aabb-ab^3$$
$$-a^3b+3aabb-3ab^3+b^4$$
$$(a-b)^4 = a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4$$
$$a-b$$
$$a^5-4a^4b+6a^3bb-4aab^3+ab^4$$
$$-a^4b+4a^3bb-6aab^3+4ab^4-b^5$$
$$(a-b)^5 = a^5-5a^4b+10a^3bb-10aab^3+5ab^4-b^5$$
$$a-b$$
$$a^6-5a^5b+10a^3bb-10a^3b^3+5aab^4-ab^5$$
$$-a^5b+5a^4bb-10a^3b^3+10aab^4-3ab^5+b^6$$
$$(a-b)^6 = a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6$$

ꝛc.

Hier bekommen nämlich alle ungerade Potestäten von b das Zeichen $-$, die geraden aber behalten das Zeichen $+$, wovon der Grund offenbar ist: denn da in der Wurzel $-b$ steht, so gehen die Potestäten davon folgen-

folgender Gestalt fort: $-b, +bb, -b^3, +b^4, -b^5, +b^6$, ꝛc. wo die geraden Potestäten alle das Zeichen +, die ungeraden aber alle das Zeichen – haben.

343.

Hier kömmt aber diese wichtige Frage vor, wie ohne diese Rechnung wirklich fortzusetzen, alle Potestäten, sowohl von $a+b$ als von $a-b$ gefunden werden können? wobey vor allen Dingen zu merken, daß, wenn man die Potestäten von $a+b$ anzugeben im Stande ist, daraus von selbsten die Potestäten von $a-b$ entstehen, denn man darf nur die Zeichen der geraden Glieder, nämlich des 2ten, 4ten, 6ten, 8ten ꝛc. verändern. Es kömmt demnach hier darauf an, eine Regel fest zu setzen, nach welcher eine jegliche Potestät von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, gefunden werden könne, ohne daß man nöthig habe, die Rechnung durch alle vorhergehenden anzustellen.

344.

Wenn man bey den oben gefundenen Potestäten, die Zahlen, so einem jedem Gliede vorgesetzt sind, wegläßt, welche Zahlen die Coefficienten genennet werden, so bemerket man in den Gliedern eine sehr schöne Ordnung, indem erstlich eben die Potestät von a vorkömmt, welche verlanget wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potestäten von a immer um eins niedriger, die Potestäten von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summe der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Wenn man also die zehnte Potestät von $a+b$ verlanget, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fort gehen:

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8bb,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ a^1b^9,\ b^{10}.$$

345. Es

345.

Es muß also nur noch gezeiget werden, wie man die darzu gehörigen Coefficienten finde, oder mit was für Zahlen ein jegliches Glied multiplicirt werden soll. Was zwar das erste Glied anbetrifft, so ist sein Coefficient immer 1 und bey dem zweyten Glied ist der Coefficient allemal der Exponent der Potestät selber. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemerken, inzwischen, wenn diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, so kann man leicht so weit gehen als man will, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Potest. I. = =	Coefficienten 1, 1.
II. = = = =	1, 2, 1.
III. = = = =	1, 3, 3, 1.
IV. = = =	1, 4, 6, 4, 1.
V. = = =	1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI. = = =	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII. = =	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII. = =	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX. =	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X.	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.
	ꝛc.

Also wird von $a + b$ die zehnte Potestät seyn:

$$a^{10} + 10a^9b + 45a^8bb + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45a^2b^8 + 10ab^9 + b^{10}.$$

346.

Bey diesen Coefficienten ist zu merken, daß die Summe derselben für jede Potestät die gleiche Potestät von 2 geben müsse. Denn man setze $a=1$, und $b=1$, so wird ein jedes Glied außer dem Coefficienten $=1$, so daß nur die Coefficienten zusammen genommen werden müssen. Daher denn die zehnte Potestät seyn wird $(1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Eben

Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

Iste $1 + 1 = 2 = 2^1$.
IIte $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$.
IIIte $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$.
IVte $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$.
Vte $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.
VIte $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$.
VIIte $1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7$.
2c.

347.

Bey diesen Coefficienten ist noch zu merken, daß dieselben von Anfang bis in die Mitte steigen, hernach aber nach eben der Ordnung wieder abnehmen: Bey den geraden steht der größte in der Mitte, bey den ungeraden aber sind zwey mittlere, welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung selbst aber verdienet noch genauer in Erwegung gezogen zu werden, damit man dieselben für eine jegliche Potestät finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regel gegeben werden soll; der Beweis aber davon wird in das folgende Capitel ersparet werden.

348.

Um nun die Coefficienten für eine gegebene Potestät, als z. E. die siebente zu finden, so schreibe man folgende Brüche der Ordnung nach hinter einander:

$$\tfrac{7}{1},\ \tfrac{6}{2},\ \tfrac{5}{3},\ \tfrac{4}{4},\ \tfrac{3}{5},\ \tfrac{2}{6},\ \tfrac{1}{7}.$$

wo nämlich die Zähler von dem Exponenten der verlangten Potestät anfangen und immer um eines vermindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 2c. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweyten Coefficienten; die zwey ersten Brüche mit einander

einander multiplicirt den dritten, die drey ersten mit einander multiplicirt den vierten, und so fort.

Also ist der erste Coefficient $= 1$, der 2te $= \frac{7}{1} = 7$, der 3te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} = 21$, der 4te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} = 35$, der 5te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} = 35$, der 6te $= \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{3}{5} = 21$, der 7te $= 21 \cdot \frac{2}{6} = 7$, der 8te $= 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$.

349.

Also für die zweyte Potestät hat man diese Brüche $\frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2}$, daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{2}{1} = 2$, der 3te $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Vor die dritte Potestät hat man diese Brüche $\frac{3}{1}; \frac{2}{2}; \frac{1}{3}$; daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{3}{1} = 3$, der 3te $3 \cdot \frac{2}{2} = 3$, der 4te $\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1$.

Vor die vierte Potestät hat man diese Brüche $\frac{4}{1}; \frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}$; daher der erste Coefficient $= 1$, der 2te $\frac{4}{1} = 4$, der 3te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} = 6$, der 4te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 4$, der 5te $\frac{4}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 1$.

350.

Diese Regel schaffet uns also diesen Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wissen, sondern sogleich für eine jegliche Potestät die dahin gehörigen Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potestät schreibt man diese Brüche $\frac{10}{1}, \frac{9}{2}, \frac{8}{3}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}, \frac{4}{7}, \frac{3}{8}, \frac{2}{9}, \frac{1}{10}$. Daher bekömmt man den ersten Coefficient $= 1$, den zweyten Coefficient $= \frac{10}{1} = 10$.

den 3ten $= 10 \cdot \frac{9}{2} = 45$, den 4ten $= 45 \cdot \frac{8}{3} = 120$,
den 5ten $= 120 \cdot \frac{7}{4} = 210$, den 6ten $= 210 \cdot \frac{6}{5} = 252$.
den 7ten $= 252 \cdot \frac{5}{6} = 210$, den 8ten $= 210 \cdot \frac{4}{7} = 120$.
den 9ten $= 120 \cdot \frac{3}{8} = 45$, den 10ten $= 45 \cdot \frac{2}{9} = 10$,
den 11ten $= 10 \cdot \frac{1}{10} = 1$.

351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben, ohne den Werth derselben zu berechnen, und solcher Gestalt wird es leicht seyn, eine jegliche Potestät

stät von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, hinzuschreiben.

Also wird die 100te Potestät seyn $(a+b)^{100} = a^{100} + \frac{100}{1} a^{99} b + \frac{100.99.}{1\ \ 2} a^{98} bb + \frac{100.99.98.}{1\ \ 2\ \ 3} a^{97} b^3 + \frac{100.99.98.97.}{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4} a^{96} b^4$ 2c. woraus die Ordnung der folgenden Glieder offenbar zu ersehen.

Capitel II.

Von der Versetzung der Buchstaben, als worauf der Beweis der vorigen Regel beruhet.

352.

Wenn man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurücke geht, so wird man finden, daß ein jegliches Glied so vielmal vorkömmt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen lassen: als bey der zweyten Potestät kömmt das Glied ab zweymal vor, weil man schreiben kann ab und ba: hingegen kömmt daselbst aa nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bey der dritten Potestät kann das Glied aab auf dreyerley Weise geschrieben werden, als aab, aba, baa, und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bey der vierten Potestät kann das Glied a^3b, oder aaab, auf viererley Weise versetzt werden, als aaab, aaba, abaa, baaa, deswegen ist auch sein Coefficient 4, und das Glied aabb, hat 6 zum Coefficienten, weil sechs Versetzungen statt finden, aabb, abba, baba, abab, bbaa, baab. Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

353.

In der That, wenn man erwäget, daß z. E. die vierte Potestät von einer jeglichen Wurzel, wenn die-

selbe auch aus mehr als zwey Gliedern besteht, als $(a+b+c+d)^4$ gefunden wird, wenn diese vier Factores mit einander multiplicirt werden I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$, so muß ein jeder Buchstabe des ersten mit einem jeglichen des andern, und ferner mit einem jeglichen des dritten, und endlich noch mit einem jeglichen des vierten multiplicirt werden, daher ein jegliches Glied aus 4 Buchstaben bestehen, und so vielmal vorkommen wird, als sich desselben Buchstaben unter einander versetzen lassen, woraus sodann sein Coefficient bestimmt wird.

354.

Hier kommt es also darauf an, zu wissen, wie vielmal eine gewisse Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobey insonderheit darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Denn wenn alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfache Potestäten, als a^2, a^3, a^4 &c. alle 1 zum Coefficienten haben.

355.

Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bey zweyen, nämlich ab anfangen, wo offenbar zwey Versetzungen statt finden, als ab, ba.

Hat man drey Buchstaben abc, so ist zu merken, daß ein jeder die erste Stelle haben könne, da denn die zwey übrigen zweymal versetzt werden können. Wenn also a zuerst steht, so hat man zwey Versetzungen abc, acb: steht b zuerst, so hat man wieder zwey, bac, bca: und eben so viel, wenn c zuerst steht, cab, cba. Daher in allem die Zahl der Versetzungen seyn wird $3 \cdot 2 = 6$.

Hat man vier Buchstaben abcd, so kann ein jeder die erste Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drey

übrigen sechs Versetzungen. Daher in allem die Anzahl der Versetzungen seyn wird 4. 6 = 24 = 4. 3. 2. 1.

Hat man fünf Buchstaben abcde, so kann ein jeder die erste Stelle haben, und für jede lassen sich die vier übrigen 24mal versetzen. Daher die Anzahl aller Versetzungen seyn wird 5. 24 = 120 = 5. 4. 3. 2. 1.

356.

So groß demnach auch immer die Anzahl der Buchstaben seyn mag, wenn dieselben nur alle ungleich unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen ganz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Anzahl der Buchst.	Anzahl der Versetz.
I.	1 = 1
II.	2. 1 = 2
III.	3. 2. 1 = 6
IV.	4. 3. 2. 1 = 24
V.	5. 4. 3. 2. 1 = 120
VI.	6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720
VII.	7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5040
VIII.	8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320
IX.	9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 362880
X.	10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 3628800

357.

Es ist aber wohl zu merken, daß diese Zahlen nur alsdenn statt finden, wenn alle Buchstaben unter sich ungleich sind, denn wenn zwey oder mehr einander gleich sind, so wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer: und wenn gar alle einander gleich sind, so hat man nur eine einzige. Wir wollen also sehen, wie nach der Anzahl der gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müssen.

358.

Sind zwey Buchstaben einander gleich, so werden die zwey Versetzungen nur auf eine gerechnet. Daher

L 2 die

die obige Zahl auf die Hälfte gebracht, oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drey Buchstaben einander gleich, so werden 6 Versetzungen nur für eine gerechnet: daher die obigen Zahlen durch 6=3. 2. 1 getheilt werden müssen. Eben so, wenn vier Buchstaben einander gleich sind, so müssen die obigen Zahlen durch 24, das ist, durch 4. 3. 2. 1 getheilt werden u. s. f.

Hieraus kann man nun bestimmen, wie vielmal diese Buchstaben aaabbc versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, welche, wenn sie ungleich wären, 6. 5. 4. 3. 2. 1 Versetzungen zulassen würden. Weil aber hier a dreymal vorkommt, so muß diese Zahl durch 3. 2. 1, und weil b zweymal vorkommt, noch ferner durch 2. 1 getheilt werden, daher die Anzahl der Versetzungen seyn wird $= \frac{6.5.4.3.2.1}{3.2.1.2.1} = 5.4.3 = 60$.

359.

Hieraus können wir nun die Coefficienten eines jeden Glieds für eine jede Potestät bestimmen, welches wir z. E. für die siebente Potestät $(a+b)^7$ zeigen wollen. Das erste Glied ist a^7, welches nur einmal vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1, wenn sie alle ungleich wären. Da aber im zweyten Glied a^6b sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch 6. 5. 4. 3. 2. 1 getheilt werden, woraus der Coefficient seyn wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{6.5.4.3.2.1} = \frac{7}{1}$.

Im dritten Glied a^5bb kommt a fünfmal und b zweymal vor, daher die obige Zahl erstlich durch 5.4.3.2.1 und noch durch 2. 1 getheilt werden muß, woraus der Coefficient seyn wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1.1.2} = \frac{7.6.}{1.2.}$

Im vierten Glied a^4b^3 steht a viermal und b dreymal; daher die obige Zahl erstlich durch 4. 3. 2. 1 und hernach

hernach noch durch 3. 2. 1 oder 1. 2. 3 getheilt werden muß: da denn der Coefficient wird $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1.1.2.3} = \frac{7.6.5}{1.2.3}$.

Eben so wird für das fünfte Glied a^3b^4 der Coefficient $= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}$ und so weiter, wodurch die oben gegebene Regel erwiesen wird.

360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter, und lehret, wie man auch von solchen Wurzeln, die aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potestäten finden soll. Wir wollen dieses nur mit der dritten Potestät von $a + b + c$ erläutern, worinnen alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müssen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficient haben wird: also wird diese dritte Potestät oder $(a + b + c)^3$ seyn.

$$a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3.$$

Laßt uns setzen, es sey $a=1$, $b=1$, $c=1$, so wird der Cubus von $1+1+1$, das ist, von 3 seyn

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27.$$

Setzt man $a=1$, $b=1$ und $c=-1$, so wird der Cubus von $1+1-1$, das ist, von 1 seyn

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1.$$

Capitel 12.

Von der Entwickelung der Irrationalpotestäten durch unendliche Reihen.

361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel a + b eine jegliche Potestät gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn als er nur immer will, so sind wir im Stande, auf eine allgemeine Art die Potestät von a + b auszudrucken, wenn der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedrückt ist.

Also werden wir nach der obigen gegebenen Regel finden

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ ꝛc.}$$

362.

Wollte man die gleiche Potestät von der Wurzel a — b nehmen, so darf man nur die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten ꝛc. Gliedes verändern, woher man haben wird:

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ ꝛc.}$$

363.

363.

Diese Formeln dienen uns um alle Arten von Wurzeln auszudrücken. Denn da wir gezeigt haben, wie die Wurzeln auf gebrochene Exponenten gebracht werden können, und daß $\sqrt[2]{}a = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{}a = a^{\frac{1}{3}}$ und $\sqrt[4]{}a = a^{\frac{1}{4}}$ u. s. f. so wird auch seyn

$$\sqrt[2]{}(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{}(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{3}} \text{ und}$$

$$\sqrt[4]{}(a+b) = (a+b)^{\frac{1}{4}} \text{ u. s. f.}$$

daher um die Quadratwurzel von $a+b$ zu finden, haben wir nur nöthig in der obigen allgemeinen Formel für den Exponenten n den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, daher wir erstlich für die Coefficienten bekommen werden

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{2},\ \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8},\ \frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10},$$

$\frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}$. Hernach ist $a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{}a$ und $a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{}a}$,

$$a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{}a},\ a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{}a} \text{ ꝛc.}$$

Oder man kann diese Potestäten von a auch also ausdrücken $a^n = \sqrt{}a$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt{}a}{a}$, $a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{}a}{a^2}$,

$$a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{}a}{a^3},\ a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{}a}{a^4} \text{ ꝛc.}$$

364.

Dieses vorausgesetzt, wird die Quadratwurzel aus $a+b$ folgendergestalt ausgedrückt werden, $\sqrt{}(a+b) =$

$$\sqrt{}a + \tfrac{1}{2}b\frac{\sqrt{}a}{a} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}bb\frac{\sqrt{}a}{aa} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}b^3\frac{\sqrt{}a}{a^3} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}.\tfrac{3}{6}.\tfrac{5}{8}b^4\frac{\sqrt{}a}{a^4}$$

ꝛc.

365.

Wenn nun a eine Quadratzahl ist, so kann $\sqrt{a}$ angegeben, und also die Quadratwurzel aus $a+b$, ohne Wurzelzeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden.

Also wenn $a=cc$, so ist $\sqrt{a}=c$, und man wird haben

$$\sqrt{(cc+b)}=c+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{b}{c}-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{bb}{c^3}+\tfrac{1}{16}\cdot\frac{b^3}{c^5}-\tfrac{5}{128}\cdot\frac{b^4}{c^7}\ \text{etc.}$$

Hierdurch kann man aus einer jeglichen Zahl die Quadratwurzel ausziehen, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, davon einer ein Quadrat ist, welcher durch cc angedeutet wird. Will man z. E. die Quadratwurzel von 6 haben, so setzt man $6=4+2$, und da wird $cc=4$, $c=2$ und $b=2$, daher bekommt man $\sqrt{6}=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}-\frac{5}{1024}$ etc. Nimmt man hiervon nur die zwey ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ größer ist als 6. Nimmt man drey Glieder, so hat man $2\frac{7}{16}=\frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

366.

Bey eben diesem Exempel, weil $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, so kann man setzen $6=\frac{25}{4}-\frac{1}{4}$.

Also wird $cc=\frac{25}{4}$, $c=\frac{5}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$. Woraus wir nur die zwey ersten Glieder berechnen wollen, da denn kommt,

$$\sqrt{6}=\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}}=\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{20}=\tfrac{49}{20},$$ wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als 6.

Setzen wir nun $6=\frac{2401}{400}-\frac{1}{400}$, so wird $c=\frac{49}{20}$ und $b=-\frac{1}{400}$. Woraus wiederum nur die zwey ersten Glieder genommen geben $$\sqrt{6}=\tfrac{49}{20}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}=\tfrac{49}{20}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}}$$ $=\frac{49}{20}-\frac{1}{1960}=\frac{4801}{1960}$, wovon das Quadrat $=\frac{23049601}{3841600}$. Nun aber ist $6=\frac{23049600}{3841600}$, also ist der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

367.

Eben so kann man auch die Cubicwurzel aus a + b durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Denn da $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, so wird in unserer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten $\frac{n}{1} = \frac{1}{3}$,

$$\frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3},\ \frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15}\ \text{ꝛc.}$$

Für die Potestäten von a aber ist $a^n = \sqrt[3]{a}$, $a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$,

$a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{aa}$, $a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3}$ ꝛc. daher erhalten wir

$$\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{a} + \tfrac{1}{3}.b\frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \tfrac{1}{9}.bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa} + \tfrac{5}{81}.b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \tfrac{10}{243}.b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4}$$

ꝛc.

368.

Wenn also a ein Cubus, nämlich $a = c^3$, so wird $\sqrt[3]{a} = c$, und also fallen die Wurzelzeichen weg. Daher man haben wird

$$\sqrt[3]{(c^3+b)} = c + \tfrac{1}{3}.\frac{b}{cc} - \tfrac{1}{9}.\frac{bb}{c^5} + \tfrac{5}{81}.\frac{b^3}{c^8} - \tfrac{10}{243}.\frac{b^4}{c^{11}}\ \text{ꝛc.}$$

369.

Durch Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubicwurzel von einer jeglichen Zahl durch die Näherung finden, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wie $c^3 + b$, davon der erste ein Cubus ist.

Also, wenn man die Cubicwurzel von 2 verlangt, so setze man $2 = 1 + 1$, da wird $c = 1$ und $b = 1$, folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ ꝛc. wovon die zwey ersten Glieder geben $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man

setze demnach $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$, so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$, und daher

$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}$. Diese zwey Glieder geben $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, wovon der Cubus ist $\frac{753571}{373248}$. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$ also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solchergestalt kann man, wenn man will, immer näher kommen, insonderheit, wenn man mehr Glieder nehmen will.

Capitel 13.

Von der Entwickelung der negativen Potestäten.

370.

Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} könne ausgedrückt werden, daher wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedrückt, also, daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potestät von $a+b$, deren Exponent -1 ist, kann angesehen werden: woher sich die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch auf diesen Fall erstrecket.

371.

Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, so setze man in der oben gefundenen Formel $n = -1$, so wird man erstlich für die Coefficienten haben; $\frac{n}{1} = -1$, $\frac{n-1}{2} = -1$, $\frac{n-2}{3} = -1$, $\frac{n-3}{4} = -1$, $\frac{n-4}{5} = -1$ 2c. hernach für die Potestäten von a:

$a^n =$

$a^n = a^{-1} = \frac{1}{a}, a^{n-1} = \frac{1}{a^2}, a^{n-2} = \frac{1}{a^3}, a^{n-3} = \frac{1}{a^4}$ ꝛc.

Daher erhalten wir $(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b}{a^6}$ ꝛc. welche eben diejenige Reihe ist, die schon oben durch die Division gefunden worden.

372.

Da ferner $\frac{1}{(a+b)}$ so viel ist als $(a+b)^{-2}$, so kann auch diese Formel in eine unendliche Reihe aufgelöst werden. Man setze nämlich $n = -2$, so hat man erstlich für die Coefficienten, $\frac{n}{1} = -\frac{2}{1}, \frac{n-1}{2} = -\frac{3}{2}, \frac{n-2}{3} = -\frac{4}{3}, \frac{n-3}{4} = -\frac{5}{4}$ ꝛc. und für die Potestäten von a hat man $a^n = \frac{1}{a^2}, a^{n-1} = \frac{1}{a^3}$ $a^{n-2} = \frac{1}{a^4}, a^{n-3} = \frac{1}{a^5}$ ꝛc. daher erhalten wir $(a+b)^{-2}$ $= \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{2}{1} \cdot \frac{b}{a^3} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \frac{b^2}{a^4}, - \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \frac{b^3}{a^5} + \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{b^4}{a^6}$ ꝛc. Nun aber ist $\frac{2}{1} = 2, \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} = 3, \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4, \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5$ ꝛc. Also werden wir haben: $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8}$ ꝛc.

373.

Setzen wir weiter $n = -3$, so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$, das ist, für $\frac{1}{(a+b)^3}$. Für die Coefficienten wird also seyn, $\frac{n}{1} = -\frac{3}{1}, \frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2},$

$\frac{n-2}{3}$

$\frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4}$ ꝛc. für die Potestät von a aber $a^n = \frac{1}{a^3}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^5}$ ꝛc. Woraus wir erhalten $\frac{1}{(a+b)^3}$

$$= \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7} \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}} \text{ ꝛc.}$$

Laßt uns ferner setzen $n = -4$, so haben wir für die Coefficienten $\frac{n}{1} = -\frac{4}{1}$, $\frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3}$, $\frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4}$ ꝛc. für die Potestäten von a aber $a^n = \frac{1}{a^4}$, $a^{n-1} = \frac{1}{a^5}$, $a^{n-2} = \frac{1}{a^6}$ $a^{n-3} = \frac{1}{a^7}$, $a^{n-4} = \frac{1}{a^8}$ ꝛc. Woraus gefunden wird:

$$\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^8} \text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9} \text{ ꝛc.}$$

374.

Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für eine jegliche dergleichen negative Potestät auf eine allgemeine Art haben werde:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\frac{b^3}{a^{m+3}} \text{ ꝛc.}$$

Aus welcher Formel nun alle dergleichen Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden, wo man auch so gar für m Brüche annehmen kann, um irrationale Formeln auszudrücken.

375.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen: Da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ rc.}$$

So wollen wir diese Reihe mit a + b multipliciren, weil alsdenn die Zahl heraus kommen muß 1. Die Multiplication wird aber also zu stehen kommen:

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ rc.}$$

$$a + b$$

$$1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{aa} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} \text{ rc.}$$

$$+ \frac{b}{a} - \frac{b^2}{aa} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ rc.}$$

Product 1 wie nothwendig folgen muß.

376.

Da wir ferner gefunden haben $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7}$ rc. wenn man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, so muß ebenfalls 1 heraus kommen. Es ist aber $(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$ und die Multiplication wird also zu stehen kommen

$$\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}-\frac{6b^5}{a^7} \text{ rc.}$$

$$aa+2ab+bb$$

$$1-\frac{2b}{a}+\frac{3bb}{a^2}-\frac{4b^3}{a^3}+\frac{5b^4}{a^4}-\frac{6b^5}{a^5} \text{ rc.}$$

$$+\frac{2b}{a}-\frac{4bb}{a^2}+\frac{6b^3}{a^3}-\frac{8b^4}{a^4}+\frac{10b^5}{a^5} \text{ rc.}$$

$$+\frac{bb}{a^2}-\frac{2b^3}{a^3}+\frac{3b^4}{a^4}-\frac{4b^5}{a^5} \text{ rc.}$$

Product 1 wie die Natur der Sache erfordert.

377.

Sollte man aber diese für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit a+b multipliciren, so müßte $\frac{1}{a+b}$ heraus kommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$ rc. welches auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6} \text{ rc.}$$

$$a+b$$

$$\frac{1}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{3bb}{a^3}-\frac{4b^3}{a^4}+\frac{5b^4}{a^5} \text{ rc.}$$

$$+\frac{b}{a^2}-\frac{2bb}{a^3}+\frac{3b^3}{a^4}-\frac{4b^4}{a^5} \text{ rc.}$$

$$\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5} \text{ rc.}$$

Ende des zweyten Abschnitts.

Des
Ersten Theils
Dritter Abschnitt.
Von
den Verhältnissen und Proportionen.

Des

Ersten Theils

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

Capitel 1.

Von der arithmetischen Verhältniß, oder dem Unterscheid zwischen zweyen Zahlen.

378.

Entweder sind zwey Größen einander gleich, oder einander ungleich. Im letztern Fall ist eine größer als die andere, und wenn man nach ihrer Ungleichheit fragt, so kann dies auf zweyerley Weise geschehen; denn entweder fragt man, um wie viel die eine größer sey als die andere? oder man fragt, wie vielmal die eine größer sey als die andere? Beyderley Bestimmung wird ein Verhältniß genennt, und die erstere pflegt eine arithmetische Verhältniß, die letztere aber eine geometrische genennt zu werden. Welche Benennungen aber mit der Sache selbst keine Gemeinschaft haben, sondern willkührlich eingeführt worden sind.

379.

Es versteht sich hier von selbst, daß die Größen einerley Art seyn müssen, weil sonst nichts von ihrer Gleichheit, oder Ungleichheit bestimmt werden kann. Denn es würde ungereimt seyn, wenn einer z. E. fragen wollte, ob 2 ℔ und 3 Ellen einander gleich oder ungleich wären? Daher ist hier allenthalben von Größen einerley Art die Rede, und da sich dieselbe immer durch Zahlen anzeigen lassen, so wird, wie schon anfänglich gemeldet worden, hier nur von bloßen Zahlen gehandelt.

380.

Wenn also von zwey Zahlen gefragt wird, um wie viel die eine größer sey als die andere, so wird durch die Antwort ihr arithmetisches Verhältniß bestimmt. Da nun solches geschiehet, wenn man den Unterscheid zwischen den beyden Zahlen anzeigt, so ist ein arithmetisches Verhältniß nichts anders als der Unterscheid zwischen zweyen Zahlen. Welches letztere Wort (Unterscheid) füglicher gebraucht wird, so, daß das Wort Verhältniß nur allein bey den sogenannten geometrischen Verhältnissen beybehalten wird.

381.

Der Unterscheid zwischen zweyen Zahlen wird aber gefunden, wenn man die kleinere von der größern subtrahirt, und dadurch erhält man die Antwort auf die Frage, um wie viel die eine größer sey als die andere. Wenn also die beyden Zahlen einander gleich sind, so ist der Unterscheid nichts oder Null, und wenn man fragt, um wie viel die eine größer sey als die andere? so muß man antworten, um nichts. Da z. E. $6 = 2 \cdot 3$, so ist der Unterscheid zwischen 6 und $2 \cdot 3$ nichts.

382.

Sind aber die beyden Zahlen ungleich, als 5 und 3, und man fragt, um wie viel 5 größer sey als 3, so ist die Antwort, um 2; welche gefunden wird, wenn man 3 von 5 subtrahiret. Eben so ist 15 um 5 größer als 10, und 20 ist um 8 größer als 12.

383.

Hier kommen also drey Sachen zu betrachten vor; erstlich, die größere Zahl, zweytens, die kleinere, und drittens, der Unterscheid, welche unter sich eine solche Verbindung haben, daß man immer aus zwey derselben die dritte finden kann. Es sey die größere $= a$, die kleinere $= b$, und der Unterscheid, welcher auch die Differenz genennt wird, $= d$: so wird der Unterscheid d gefunden, wenn man b von a subtrahirt, also, daß $d = a - b$; woraus erhellet, wie man, wenn a und b gegeben sind, d finden soll.

384.

Wenn aber die kleinere Zahl b, nebst dem Unterscheid d gegeben ist, so wird die größere daraus gefunden, wenn man den Unterscheid zu der kleinern Zahl addirt, daher bekommt man die größere $a = b + d$. Denn wenn man von $b + d$ die kleinere b abzieht, so bleibt übrig d, welches der vorgegebene Unterscheid ist. Gesetzt, die kleinere Zahl sey 12, und der Unterscheid 8, so wird die größere seyn $= 20$.

385.

Wenn aber die größere Zahl a nebst dem Unterscheid d gegeben ist, so wird die kleinere b gefunden, wenn man den Unterscheid von der größeren Zahl subtrahirt. Daher bekommt man $b = a - d$. Denn wenn ich diese

Zahl $a-d$ von der größeren a subtrahire, so bleibt übrig d, welches der gegebene Unterscheid ist.

386.

Diese drey Zahlen a, b, d sind also dergestalt mit einander verbunden, daß man daraus die drey folgenden Bestimmungen erhält. Erstens hat man $d=a-b$, 2tens $a=b+d$, und 3tens $b=a-d$, und wenn von diesen drey Vergleichungen eine wahr ist, so sind auch die beyden andern nothwendig wahr. Wenn daher überhaupt $z=x+y$, so ist auch nothwendig $y=z-x$ und $x=z-y$.

387.

Bey einem solchen arithmetischen Verhältniß ist zu merken, daß, wenn zu den beyden Zahlen a und b eine beliebige Zahl c entweder addirt, oder davon subtrahirt wird, der Unterscheid eben derselbe bleibet. Also, wenn d der Unterscheid ist zwischen a und b, so ist auch d der Unterscheid zwischen den beyden Zahlen $a+c$ und $b+c$, und auch zwischen $a-c$ und $b-c$. Da z. E. zwischen diesen Zahlen 20 und 12 der Unterscheid 8 ist, so bleibt auch dieser Unterscheid, wenn man zu denselben Zahlen 20 und 12 eine Zahl nach Belieben entweder addirt oder subtrahirt.

388.

Der Beweis hievon ist offenbar. Denn wenn $a-b=d$ so ist auch $(a+c)-(b+c)=d$. Eben so wird auch seyn $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

Wenn die beyden Zahlen a und b verdoppelt werden, so wird auch der Unterscheid zweymal so groß. Wenn also $a-b=d$, so wird seyn $2a-2b=2d$; und allgemein wird man haben $na-nb=nd$, was man auch immer vor eine Zahl für n annimmt.

Capitel 2.

Von den arithmetischen Proportionen.

390.

Wenn zwey arithmetische Verhältnisse einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine arithmetische Proportion genennt.

Also, wenn $a-b=d$ und auch $p-q=d$, so, daß der Unterscheid zwischen den Zahlen p und q eben so groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so machen diese vier Zahlen eine arithmetische Proportion aus, welche also geschrieben wird $a-b=p-q$, als wodurch deutlich angezeigt wird, daß der Unterscheid zwischen a und b eben so groß sey als zwischen p und q.

391.

Eine arithmetische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche so beschaffen seyn müssen, daß, wenn man das zweyte von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als wenn man das vierte von dem dritten subtrahirt. Also machen diese Zahlen 12, 7, 9, 4, eine arithmetische Proportion aus, weil $12-7=9-4$.

392.

Wenn man eine arithmetische Proportion hat, als $a-b=p-q$, so lassen sich darinn das zweyte und dritte Glied verwechseln, und es wird auch seyn $a-p=b-q$. Denn da $a-b=p-q$, so addire man erstlich beyderseits b, und da hat man $a=b+p-q$. Hernach subtrahire man beyderseits p, so bekommt man $a-p=b-q$.

Da also $12-7=9-4$, so ist auch $12-9=7-4$.

393.

In einer jeglichen arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweyten und zugleich das dritte mit dem vierten verwechseln. Denn wenn $a-b=p-q$, so ist auch $b-a=q-p$. Denn $b-a$ ist das Negative von $a-b$, und eben so ist auch $q-p$ das Negative von $p-q$. Da nun $12-7=9-4$, so ist auch $7-12=4-9$.

394.

Insonderheit aber ist bey einer jeglichen arithmetischen Proportion diese Haupteigenschaft wohl zu bemerken, daß die Summe des zweyten und dritten Gliedes immer eben so groß sey, als die Summe des ersten und vierten Gliedes. Welches auch also ausgesprochen wird, daß die Summe der mittlern Glieder so groß sey als die Summe der äußern. Also da $12-7=9-4$, so ist $7+9=12+4$, denn jedes macht 16.

395.

Um diese Haupteigenschaft zu beweisen, so sey $a-b=p-q$: man addire beyderseits $b+q$, so bekommt man $a+q=b+p$, das ist die Summe des ersten und ist gleich der Summe des zweyten und dritten. Hinwiederum auch, wenn vier Zahlen als a, b, p, q, so beschaffen sind, daß die Summe der zweyten und dritten so groß ist als die Summe der ersten und vierten, nämlich, daß $b+p=a+q$, so sind dieselben Zahlen gewiß in einer arithmetischen Proportion, und es wird seyn $a-b=p-q$. Denn da $a+q=b+p$, so subtrahire man beyderseits $b+q$, und da bekommt man $a-b=p-q$.

Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summe der mittlern $13+15=28$ der Summe der äußern $18+10=28$ gleich sind, so sind dieselben auch gewiß in einer arithmetischen Proportion, und folglich $18-13=15-10$.

396.

Aus dieser Eigenschaft kann man leicht folgende Frage auflösen: Wenn von einer arithmetischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben sind, wie man daraus das vierte finden soll. Es seyn die drey ersten Glieder a, b, p, und für das vierte, so gefunden werden soll, schreibe man q, so wird man haben $a+q=b+p$. Nun subtrahire man beyderseits a, so bekommt man $q=b+p-a$. Also wird das vierte Glied gefunden, wenn man das zweyte und dritte zusammen addirt, und von der Summe das erste subtrahirt. Es seyn z. E. 19, 28, 13 die drey ersten Glieder, so ist die Summe des zweyten und dritten $=41$, davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die arithmetische Proportion wird seyn $19-28=13-22$, oder $28-19=22-13$, oder $28-22=19-13$.

397.

Wenn in einer arithmetischen Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drey Zahlen, welche also beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist als die andere weniger der dritten, oder daß der Unterscheid zwischen der ersten und andern so groß ist, als der Unterscheid zwischen der andern und dritten. Solche 3 Zahlen sind 19, 15, 11, weil $19-15=15-11$.

398.

Solche drey Zahlen schreiten in einer arithmetischen Progression fort, welche entweder steigt, wenn die zweyte um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Exempel 4, 7, 10, oder fällt, wenn die Zahlen um gleich viel kleiner werden als 9, 5, 1.

399.

Es seyn die Zahlen a, b, c in einer arithmetischen Progression, so muß seyn $a-b=b-c$, woraus folget,

nach der Gleichheit der mittlern und der äußern Summe $2b = a + c$. Nimmt man beyderseits a weg, so bekommt man $c = 2b - a$.

400.

Wenn also von einer arithmetischen Progression die zwey ersten Glieder gegeben sind als a, b, so wird daraus das dritte gefunden, wenn man das zweyte verdoppelt, und davon das erste subtrahirt. Es seyn 1 und 3 die zwey ersten Glieder einer arithmetischen Progression, so wird das dritte seyn $= 2.3 - 1 = 5$, und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion $1 - 3 = 3 - 5$.

401.

Man kann nach dieser Regel weiter fortschreiten, und wie man aus dem ersten und zweyten das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solchergestalt die arithmetische Progression fortsetzen, so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweyte, so wird das dritte $= 2b - a$; das vierte $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$; das fünfte $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$; das sechste $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$; das siebente $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ ꝛc.

Capitel 3.

Von den arithmetischen Progressionen.

402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine arithmetische Progression genennt.

Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ꝛc. eine arithmetische Progression, weil dieselben immer um eins steigen, und diese Reihe, als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 ꝛc. ist auch eine arithmetische Progression, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

403.

Die Zahl, um welche die Glieder einer arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, wird die Differenz oder der Unterscheid genennt. Wenn also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, so kann man die arithmetische Progression, so weit man will, fortsetzen. Es sey z. E. das erste Glied = 2, und die Differenz = 3, so wird die steigende Progression seyn:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 ꝛc.

wo ein jedes Glied gefunden wird, wenn man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

404.

Man pflegt über die Glieder einer solchen arithmetischen Progression die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 ꝛc. zu schreiben, damit man so gleich sehen könne, das wie vielte Glied ein jegliches sey, und die also darüber geschriebene Zahlen werden die Zeiger genennt, das obige Exempel kommt daher also zu stehen:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Arith. Prog.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29 ꝛc.

woraus man sieht, daß 29 das zehnte Glied sey.

405.

Es sey a das erste Glied und d die Differenz, so wird die arithmetische Progression also zu stehen kommen:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$,	$a+7d$ ꝛc.

woraus so gleich ein jegliches Glied gefunden werden kann, ohne daß man nöthig habe alle vorhergehende zu wissen, und dieses bloß allein aus dem ersten Glied a und der Differenz d. Also wird z. E. das 10te Glied seyn $= a + 9d$, das 100te $= a + 99d$, und auf eine allgemeine Art wird das $n$te Glied seyn $a + (n - 1)d$.

406.

Wenn die arithmetische Progression irgendwo abgebrochen wird, so hat man insonderheit das erste Glied und das letzte zu bemerken, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $= a + (n-1)d$. Dasselbe wird also gefunden, wenn man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt. Man habe z. E. eine arithmetische Progression von 100 Gliedern, wovon das erste $= 4$ und die Differenz $= 3$, so wird das letzte Glied seyn $99 \cdot 3 + 4 = 301$.

407.

Hat man das erste Glied $= a$ und das letzte $= z$ nebst der Anzahl der Glieder $= n$, so kann man daraus die Differenz $= d$ finden. Denn da das letzte Glied ist $z = a + (n - 1)d$, so subtrahire man beyderseits a, so hat man $z - a = (n - 1)d$. Wenn man also von dem letzten Glied das erste subtrahirt, so hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder $z - a$ ist das Product von $(n - 1)$ in d. Man darf also nur $z - a$ durch $n - 1$ dividiren, so bekommt man die Differenz $d = \frac{z - a}{n - 1}$, woraus diese Regel entspringt. Man subtrahirt vom letzten Glied das erste, den Rest theilt man durch die Anzahl der Glieder

weniger

weniger eins, so bekommt man die Differenz: woraus man hernach die ganze Progression hinsetzen kann.

408.

Es hat z. E. einer eine arithmetische Progression von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26, von welcher die Differenz gesucht werden soll. Man muß also das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren, und den Rest 24 durch $9-1$, das ist, durch 8 dividiren, so bekommt man die Differenz $=3$, und die Progression selbst wird seyn:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26. \end{array}$$

Um ein ander Exempel zu geben; so sey das erste Glied 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, wovon die arithmetische Progression verlangt wird. Hier bekommt man also zur Differenz $\frac{2-1}{10-1} = \frac{1}{9}$; woraus die verlangte Progression seyn wird:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 1, & 1\frac{1}{9}, & 1\frac{2}{9}, & 1\frac{3}{9}, & 1\frac{4}{9}, & 1\frac{5}{9}, & 1\frac{6}{9}, & 1\frac{7}{9}, & 1\frac{8}{9}, & 2. \end{array}$$

Noch ein Exempel. Es sey das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$, und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz $\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1} = \frac{10\frac{1}{6}}{6} = \frac{61}{36} = 1\frac{25}{36}$; folglich wird die Progression seyn:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7. \\ 2\frac{1}{3}, & 4\frac{1}{36}, & 5\frac{13}{18}, & 7\frac{5}{12}, & 9\frac{1}{9}, & 10\frac{29}{36}, & 12\frac{1}{2}. \end{array}$$

409.

Wenn ferner das erste Glied a und das letzte z, sammt der Differenz d gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder n finden. Denn da $z-a$ $=(n-1)$

$=(n-1)d$, so dividire man beyderseits mit d, und da bekommt man $\frac{z-a}{d}=n-1$. Da nun n um eins größer ist als $n-1$, so wird $n=\frac{z-a}{d}+1$; folglich findet man die Anzahl der Glieder, wenn man den Unterscheid zwischen dem ersten und letzten Glied $z-a$ durch die Differenz dividiret, und zum Quotient $\frac{z-a}{d}$ noch eins addirt.

Es sey z. E. das erste Glied $=4$, das letzte $=100$, und die Differenz $=12$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{100-4}{12}+1=9$, und diese neun Glieder sind folgende:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
4, 16, 28, 40, 52, 64, 76, 88, 100.

Es sey das erste Glied $=2$, das letzte $=6$, und die Differenz $=1\frac{1}{3}$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{4}{1\frac{1}{3}}+1=4$, und diese vier Glieder sind:

1, 2, 3, 4.
2, $3\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$, 6.

Es sey ferner das erste Glied $=3\frac{1}{3}$, das letzte $=7\frac{2}{3}$, und die Differenz $=1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder $=\frac{7\frac{2}{3}-3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}}+1=4$, und diese vier Glieder sind:

1, 2, 3, 4.
$3\frac{1}{3}$, $4\frac{7}{9}$, $6\frac{2}{9}$, $7\frac{2}{3}$.

410.

Es ist aber hier wohl zu merken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine ganze Zahl seyn muß. Wenn man

man also bey obigem Exempel für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Frage ungereimt gewesen.

Wenn folglich für $\frac{z-a}{d}$ keine ganze Zahl gefunden würde, so liesse sich diese Frage nicht auflösen, und man müßte antworten, daß die Frage unmöglich wäre. Daher muß sich bey dergleichen Fragen die Zahl $z-a$ durch d theilen lassen.

411.

Bey einer jeden arithmetischen Progression kommen also folgende vier Stücke zu betrachten vor:

I. das erste Glied a, II. das letzte Glied z,
III. die Differenz d, IV. die Anzahl der Glieder n,

welche so beschaffen sind, daß, wenn drey derselben bekannt, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:

I. Wenn a, d und n bekannt sind, so hat man $z = a + (n-1)d$.

II. Wenn z, d und n bekannt sind, so hat man $a = z - (n-1)d$.

III. Wenn a, z und n bekannt sind, so hat man $d = \frac{z-a}{n-a}$

IV. Wenn a, z und d bekannt sind, so hat man $n = \frac{z-a}{d} + 1$.

Capitel 4.

Von der Summation der arithmetischen Progressionen.

412.

Wenn eine arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summe derselben zu suchen, welche gefunden wird, wenn man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig

seyn

seyn würde, wenn die Progression aus sehr viel Gliedern besteht, so kann eine Regel gegeben werden, durch deren Hülfe diese Summe ganz leicht gefunden wird.

413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied = 2, die Differenz = 3, das letzte Glied = 29, und die Anzahl der Glieder = 10 ist.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

Hier ist nun die Summe des ersten und letzten Gliedes = 31, die Summe des zweyten und letzten ohne eins = 31, die Summe des dritten und letzten ohne zwey = 31, die Summe des vierten und letzten ohne drey = 31, und so ferner, woraus man sieht, daß immer zwey Glieder, die von dem ersten und letzten gleichweit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

414.

Der Grund davon fällt auch so gleich in die Augen. Denn wenn das erste Glied gesetzt wird = a, und das letzte = z, die Differenz aber = d, so ist die Summe des ersten und letzten = $a + z$. Hernach ist das zweyte Glied $a + d$, und das letzte ohne eins = $z - d$, welche zusammen genommen machen $a + z$. Ferner ist das dritte Glied $a + 2d$, und das letzte ohne zwey = $z - 2d$, welche zusammen betragen $a + z$. Woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellet.

415.

Um nun die Summe der obigen Progression zu finden, nämlich von $2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29$, so schreibe man darunter eben diese Progression rückwärts, und addire Glied vor Glied, wie folget

$$\begin{array}{l} 2+5+8+11+14+17+20+23+26+29 \\ 29+26+23+20+17+14+11+8+5+2 \\ \hline 31+31+31+31+31+31+31+31+31+31 \end{array}$$

welche gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe offenbar zweymal so groß ist als die Summe unserer Progreßion. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Progreßion, und also ist derselben Summe = 10. 31 = 310. Da nun diese Summe zweymal so groß ist, als die Summe der arithmetischen Progreßion, so wird die rechte Summe seyn = 155.

416.

Wenn man auf diese Art mit einer jeglichen arithmetischen Progreßion verfährt, wovon das erste Glied = a, das letzte = z, und die Anzahl der Glieder = n, indem man eben dieselbe Progreßion rückwärts darunter schreibt, und Glied vor Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied a + z, deren Anzahl = n, folglich ist die Summe derselben = n (a + z), welche zweymal so groß ist, als die Summe der Progreßion, daher ist die Summe der arithmetischen Progreßion selbst $= \frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Hieraus erlangen wir nun diese leichte Regel, um die Summe einer jeglichen arithmetischen Progreßion zu finden:

Man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summe der ganzen Progreßion anzeigen.

Oder, welches auf eins läuft: man multiplicire die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch, man multiplicire die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes mit der ganzen Anzahl der Glieder, so bekommt man die Summe der ganzen Progreſſion.

418.

Es iſt nöthig, dieſe Regel mit einigen Exempeln zu erläutern. Es ſey demnach gegeben die Progreſſion der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, bis 100, von welchen die Summe geſucht werden ſoll. Dieſe wird nach der erſten Regel ſeyn $\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlaguhr in 12 Stunden thue? zu dieſem Ende müſſen die Zahlen 1, 2, 3, bis 12, zuſammen addirt werden, die Summe wird alſo ſeyn $\frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$.

Wollte man die Summe von eben dieſer Reihe bis 1000 fortgeſetzt wiſſen, ſo würde dieſelbe heraus kommen 500500; bis 10000 fortgeſetzt, wird dieſelbe ſeyn = 50005000.

419.

Frage. Einer kauft ein Pferd mit dieſer Bedingung; für den erſten Hufnagel zahlt er 5 Copeken, für den zweyten 8, für den dritten 11, und immer 3 Copeken mehr für einen jeden folgenden. Es ſind aber in allem 32 Nägel, wie theuer kommt ihm das Pferd zu ſtehen?

Hier wird alſo die Summe von einer arithmetiſchen Progreſſion, deren erſtes Glied 5, die Differenz = 3, und die Anzahl der Glieder = 32 iſt, geſuchet.

Hier

Hier muß nun zuförderst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regel gefunden wird $= 5 + 31 . 3 = 98$, und hieraus ergiebt sich die gesuchte Summe $\frac{103 . 32}{2} = 103 . 16$; also kommt das Pferd 1648 Copeken, oder 16 Rbl. 48 Cop. zu stehen.

420.

Es sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summe der ganzen Progression gefunden werden soll: da nun das letzte Glied seyn muß $= a + (n-1)d$, so ist die Summe des ersten und letzten Gliedes $= 2a + (n-1)d$, welche mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt, giebt $2na + n(n-1)d$, daher die gesuchte Summe seyn wird $= na + \frac{n(n-1)}{2}d$.

Nach dieser Formel, weil in dem obigen Exempel $a = 5$, $d = 3$, und $n = 32$ war, so erhält man die Summe $5 . 32 + \frac{31 . 32 . 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$ wie vorher.

421.

Wenn die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und so fort bis n zusammen addirt werden soll, so hat man um diese Summe zu finden, das erste Glied $= 1$, das letzte $= n$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summe gefunden wird $\frac{nn + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Setzt man $n = 1765$, so wird die Summe aller Zahlen von 1 bis 1766 seyn $= 883 . 1767 = 1560261$.

422.

Es sey gegeben die Progression der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 rc. welche bis auf n Glieder fortgesetzt sind, wovon die Summe verlangt wird:

Hier ist nun das erste Glied = 1, die Differenz = 2, die Anzahl der Glieder = n; daraus wird das letzte Glied seyn $1 + (n-1)2 = 2n-1$, daraus erhält man die gesuchte Summe = nn.

Folglich darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multipliciren. Man mag also von dieser Progression so viel Glieder zusammen addiren als man will, so ist die Summe immer ein Quadrat, nämlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie aus folgendem zu ersehen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 ꝛc.
Prog.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19 ꝛc.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 ꝛc.

423.

Es sey ferner das erste Glied = 1, die Differenz = 3, und die Anzahl der Glieder = n, so hat man diese Progression 1, 4, 7, 10 ꝛc. wovon das letzte Glied seyn wird: $1+(n-1)3=3n-2$; daher die Summe des ersten und letzten Gliedes $=3n-1$; folglich die Summe der Progression $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$. Nimmt man $n=20$, so ist die Summe $=10.\ 59=590$.

424.

Es sey das erste Glied = 1, die Differenz = d, und die Anzahl der Glieder = n, so wird das letzte Glied seyn $1+(n-1)d$. Hierzu das erste addirt, giebt $2+(n-1)d$, mit der Anzahl der Glieder multiplicirt $2n+n(n-1)d$, woher die Summe der Progression seyn wird $n+\frac{n(n-1)d}{2}$.

Hier wollen wir folgendes Täfelgen anhängen,

wenn $d=1$, so ist die Summe — $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{nn+n}{2}$

$d=2$ — — — — — $n+\frac{2n(n-1)}{2}=nn$

$d=3$ — — — — — $n+\frac{3n(n-1)}{2}=\frac{3nn-n}{2}$

$d=4$ — — — — — $n+\frac{4n(n-1)}{2}=2nn-n$

$d=5$ — — — — — $n+\frac{5n(n-1)}{2}=\frac{5nn-5n}{2}$

$d=6$ — — — — — $n+\frac{6n(n-1)}{2}=3nn-2n$

$d=7$ — — — — — $n+\frac{7n(n-1)}{2}=\frac{7nn-5n}{2}$

$d=8$ — — — — — $n+\frac{8n(n-1)}{2}=4nn-3n$

$d=9$ — — — — — $n+\frac{9n(n-1)}{2}=\frac{9nn-7n}{2}$

$d=10$ — — — — — $n+\frac{10n(n-1)}{2}=5nn-4n$

2c.

Capitel 5.

Von den figurirten oder vieleckigten Zahlen.

425.

Die Summation der arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen, und deren Differenz entweder 1, oder 2, oder 3, oder eine andere beliebige ganze

Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den vieleckigten Zahlen, welche entstehen, wenn man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

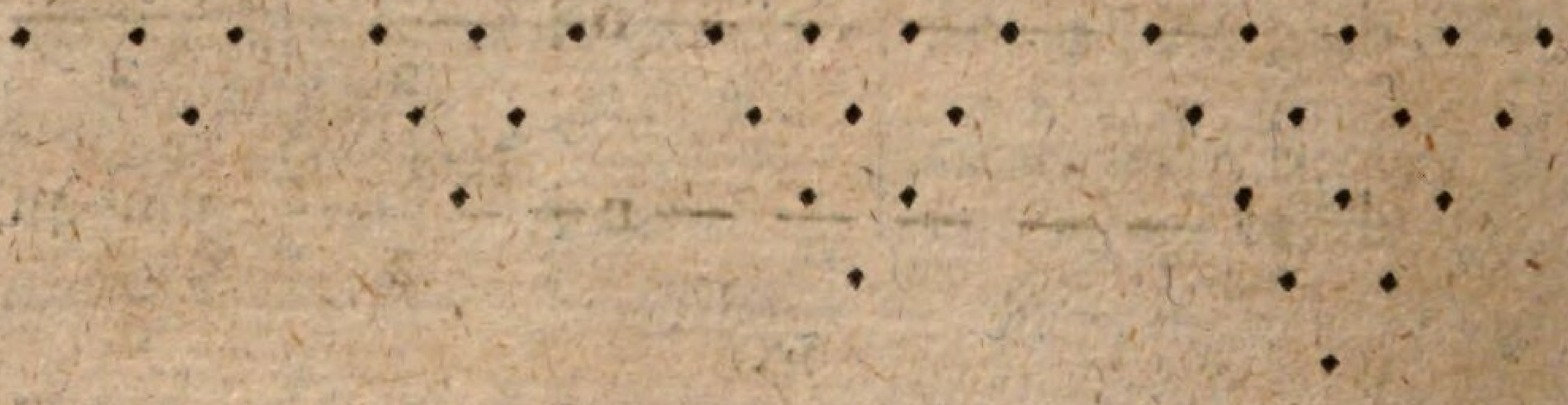
426.

Setzt man die Differenz =1, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht daher diese arithmetische Progression = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 rc. Nimmt man nun in derselben die Summe von einem, zweyen, dreyen, vieren rc. Gliedern, so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen

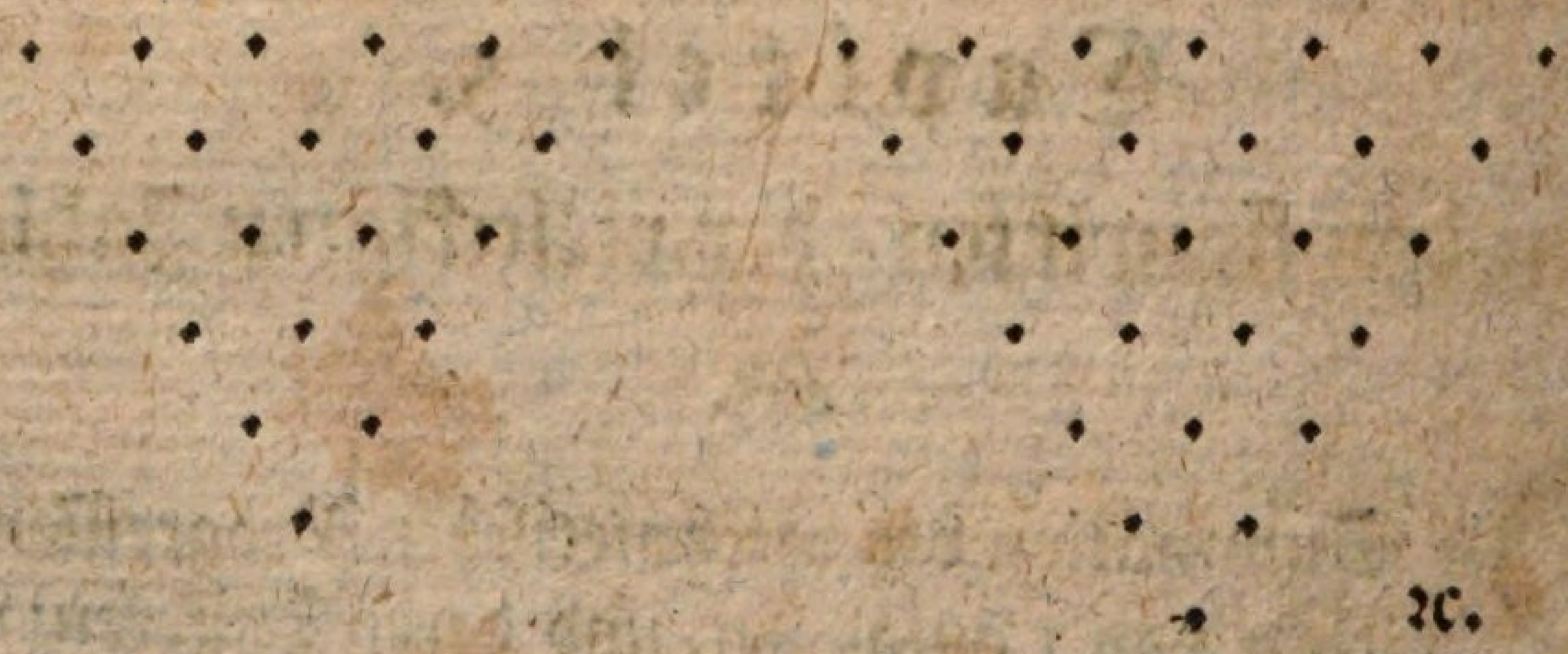
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78 rc.

Also, daß 1=1, 3=1+2, 6=1+2+3, 10=1+2+3+4 rc. Und es werden diese Zahlen dreyeckigte Zahlen genennet, weil sich, so viel Punkte als eine solche Zahl anzeigt, durch ein Dreyeck vorstellen lassen, wie aus folgendem zu ersehen,

1. 3. 6. 10. 15.



21. 28.

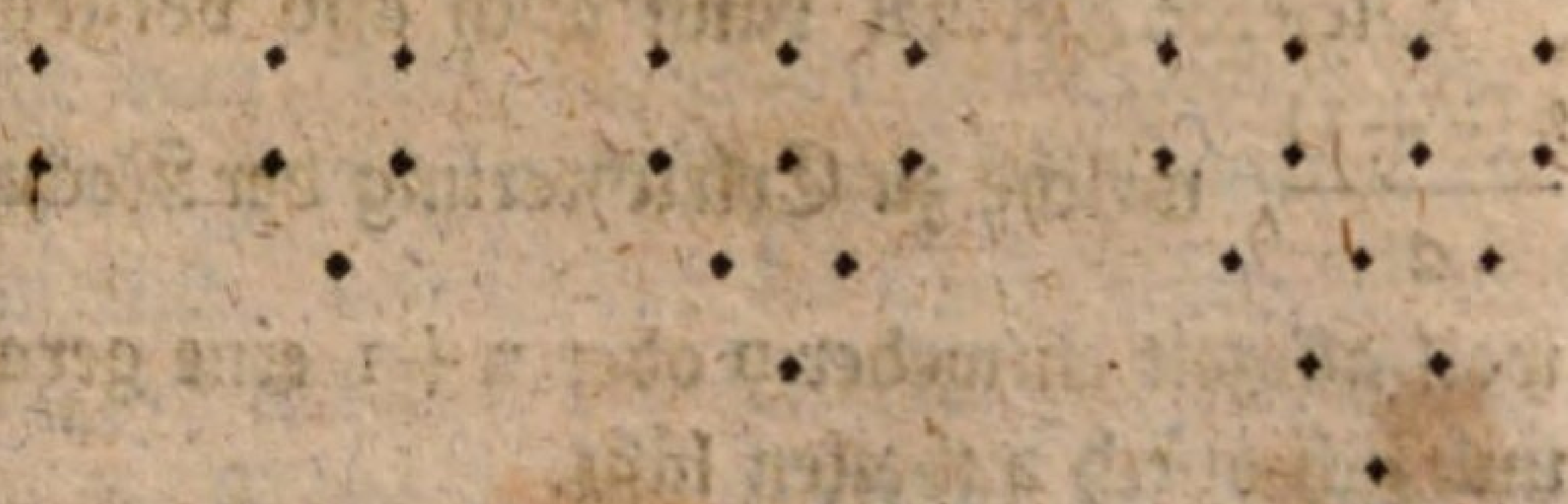


rc.

427.

Bey einem jeden dieser Dreyecke sieht man, wie viel Punkte in einer jeden Seite sind: bey dem ersten ist nur eines, bey dem zweyten 2, bey dem dritten 3, bey dem vierten 4, u. s. f. Also nach der Anzahl der Punkte in einer Seite, welche schlechtweg die Seite genennt wird, verhalten sich die dreyeckigten Zahlen, oder die Anzahl aller Punkte, welche schlechtweg ein Dreyeck genennt wird, folgender Gestalt:

Seite
Dreyeck



Seite
Dreyeck

428.

Hier kommt also die Frage vor, wie aus der gegebenen Seite das Dreyeck gefunden werden soll? welches aus dem obigen leicht geschehen kann:

Denn es sey die Seite $=n$, so wird das Dreyeck seyn $1+2+3+4+\ldots.n$, deren Summe $=\frac{nn+n}{2}$, folglich wird das Dreyeck $\frac{nn+n}{2}$. Ist also $n=1$, so wird das Dreyeck $=1$.

Ist $n=2$, so ist das Dreyeck $=3$.
$n=3$ — — — — $=6$.
$n=4$ — — — — $=10$. und so fort.

Nimmt man n = 100, so wird das Dreyeck = 5050 2c.

429.

Diese Formel $\frac{nn+n}{2}$ wird nun die Generalformel für alle dreyeckigte Zahlen genennet: weil sich aus derselben für eine jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreyeckigte Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also vorgestellet werden $\frac{n(n+1)}{2}$, welche zu Erleichterung der Rechnung dienet, weil allezeit entweder n oder n + 1 eine gerade Zahl ist, und sich durch 2 theilen läßt.

Also, wenn n = 12, so ist das Dreyeck = $\frac{12 \cdot 13}{2}$ = 6. 13 = 78. Ist n = 15, so ist das Dreyeck = $\frac{15 \cdot 16}{2}$ = 15. 8 = 120. 2c.

430.

Setzt man die Differenz = 2, so hat man diese arithmetische Progression

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 2c.

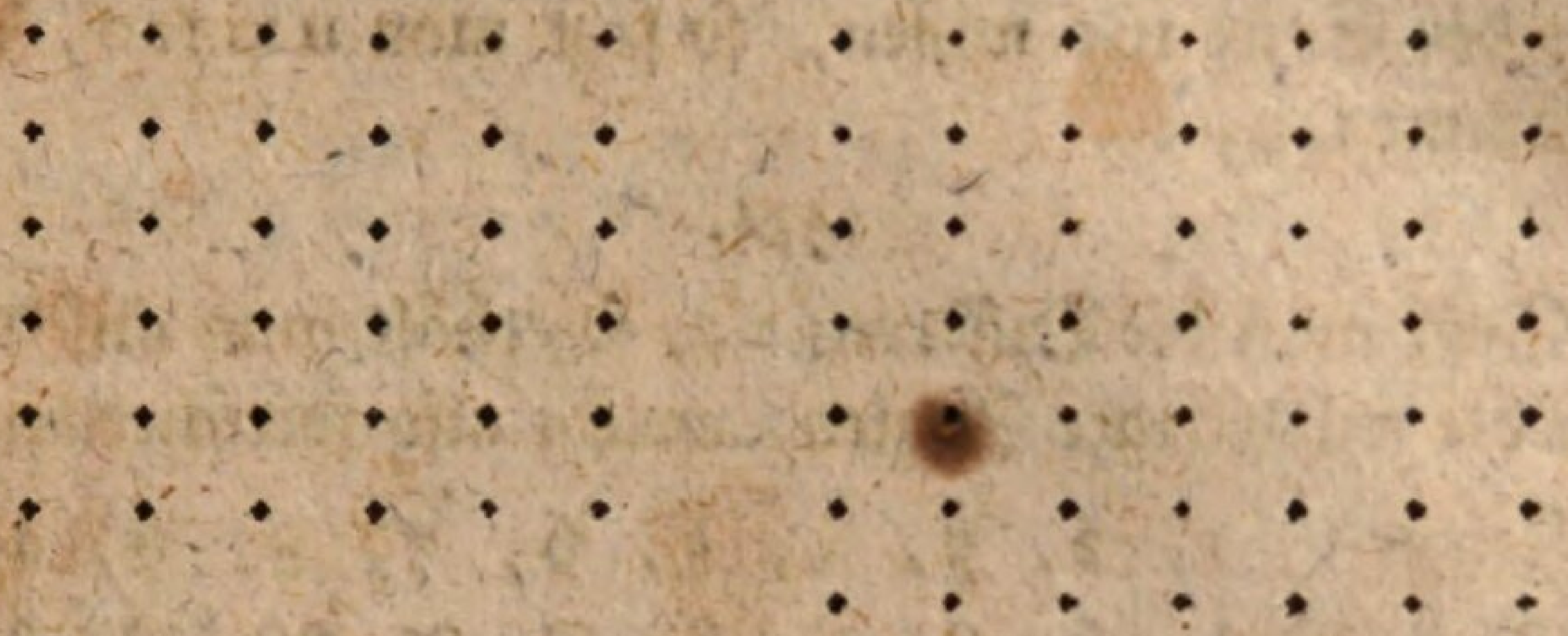
wovon die Summen diese Reihe ausmachen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 2c.

welche Zahlen viereckigte Zahlen genennt werden, und eben diejenige sind, welche oben Quadrate genennet worden; Es lassen sich nämlich so viel Punkte, als eine solche Zahl anzeigt, in ein Viereck setzen:

1, 4, 9, 16, 25,

36, 49,



431.

Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks eben so viel Punkte enthält, als die Quadratwurzel davon anzeigt, also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber, wenn die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Progression 1, 3, 5, 7 ꝛc. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben gefunden worden = nn. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben ausführlich gehandelt worden.

432.

Setzt man die Differenz = 3, und nimmt gleicher Gestalt die Summen, so werden dieselben fünfeckigte Zahlen genennt, ob sich dieselben gleich nicht mehr so net durch Punkte vorstellen lassen. Dieselben schreiten demnach folgendermaßen fort:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11
Arith. Prog.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,	31
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176 ꝛc.

und der Zeiger weiset die Seite einer jeglichen.

433.

Wenn also die Seite n gesetzt wird, so ist die fünfeckigte Zahl $= \frac{3nn - n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$. Wenn z. E. n = 7, so

ist das Fünfeck 70. Will man die fünfeckigte Zahl von der Seite 100 wissen, so setzt man $n = 100$, und bekommt 14950.

434.

Setzt man die Differenz = 4, so erhält man auf diese Art die sechseckigte Zahlen, welche also fortschreiten:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
Arith. Prog.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37.
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190.

Wo der Zeiger wiederum die Seite eines jeden giebt.

435.

Wenn also die Seite n ist, so wird die sechseckigte Zahl $= 2nn - n = n(2n-1)$, wobey zu merken, daß alle diese sechseckigte Zahlen zugleich dreyeckigte Zahlen sind. Denn wenn man in diese immer eine überspringt, so erhält man die sechseckigte.

436.

Auf gleiche Weise findet man die siebeneckigte, achteckigte, neuneckigte Zahlen, und so fort. Von welchen wir die Generalformeln hier insgesammt hersetzen wollen. Wenn also die Seite n ist, so wird seyn

$$\text{das Dreyeck} = \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Viereck} = \frac{2nn+0n}{2} = nn$$

$$\text{Veck} = \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$\text{VIeck} = \frac{4nn-2n}{2} = 2nn - n = n(2n-1)$$

$$\text{VIIeck} = \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2}$$

$$\text{VIIIeck} = \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2)$$

$$\text{IXeck} = \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2}$$

$$\text{Xeck} = \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3)$$

$$\text{XIeck} = \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2}$$

$$\text{XIIeck} = \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4)$$

$$\text{XXeck} = \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8)$$

$$\text{XXVeck} = \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2}$$

$$\text{meck} = \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$$

437.

Wenn also die Seite n ist, so hat man auf eine allgemeine Art die m eckigte Zahl = $\frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$ woraus man alle nur mögliche vieleckigte Zahlen finden kann, deren Seite = n. Wollte man daraus die zweyeckigte Zahlen finden, so würde m = 2 und dieselbe = n seyn.

Setzt man m = 3, so wird die IIIeckigte Zahl = $\frac{nn+n}{2}$

Setzt man m = 4, so wird die IVeckigte Zahl = nn rc.

438.

Um diese Regel mit einigen Exempeln zu erläutern, so suche man die XXVeckigte Zahl, deren Seite 36 ist?

 Man

Man suche erstlich vor die Seite n die XXVeckigte Zahl, so wird dieselbe $= \frac{23nn - 21n}{2}$. Nun setze man $n = 36$, so bekommt man die gesuchte Zahl $= 14526$.

439.

Frage. Einer hat ein Haus gekauft und wird gefragt wie theuer? darauf antwortet er, die Zahl der Rubel, die er dafür bezahlet, sey die 365eckigte Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden, so wird $m = 365$, und also das 365eck von $n = \frac{363nn - 361n}{2}$. Nun ist $n = 12$, woraus der gesuchte Preiß des Hauses seyn wird, 23970 Rubel.

Capitel 6.

Von dem geometrischen Verhältniß.

440.

Das geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie vielmal die eine Zahl größer sey als die andere? und wird gefunden, wenn man die eine durch die andere dividirt, da denn der Quotient die Benennung des Verhältnisses anzeigt.

441.

Es kommen demnach bey einem geometrischen Verhältniß drey Sachen zu betrachten vor. Erstlich, die erste der beyden vorgegebenen Zahlen, welche der Vor-

satz

satz genennet wird. Zweytens, die andere derselben, welche der Nachsatz genennt wird. Drittens, die Benennung des Verhältnisses, welche gefunden wird, wenn man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt: als wenn zwischen den Zahlen 18 und 12 das Verhältniß angezeigt werden soll, so ist 18 der Vorsatz, 12 der Nachsatz, und die Benennung wird seyn $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; woraus man erkennt, daß der Vorsatz 18 den Nachsatz 12 einmal und noch $\frac{1}{2}$mal in sich begreiffe.

442.

Um das geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einander gesetzten Punkte, welche zwischen dem Vorsatz und Nachsatz gesetzt werden.

Also $a:b$ zeigt das Verhältniß zwischen a und b an, welches Zeichen, wie schon oben bemerkt worden, auch die Division anzuzeigen pflegt, und eben deswegen hier gebraucht wird, weil um dieses Verhältniß zu erkennen, die Zahl a durch b getheilt werden muß: dieses Zeichen wird also mit Worten ausgesprochen; a verhält sich zu b, oder schlechtweg a zu b.

443.

Die Benennung eines solchen Verhältnisses wird demnach durch einen Bruch vorgestellt, dessen Zähler der Vorsatz, der Nenner aber der Nachsatz ist. Um der Deutlichkeit willen aber muß man diesen Bruch immer in seine kleinste Form bringen, welches geschieht, wenn man den Zähler und Nenner durch ihren größten gemeinen Theiler theilet, wie oben geschehen, da der Bruch $\frac{18}{12}$ auf $\frac{3}{2}$ ist gebracht worden, indem man den Zähler und Nenner durch 6 getheilt hat.

444.

Die Verhältnisse sind also nur in so fern unterschieden, als ihre Benennung verschieden ist, und es giebt daher so viel verschiedene Arten von Verhältnissen, als verschiedene Benennungen gefunden werden können.

Die erste Art ist nun unstreitig, wenn die Benennung 1 wird; und dieses geschieht, wenn die beyden Zahlen gleich sind, als 3:3, 4:4, a:a, wovon die Benennung 1 wird, und deswegen das Verhältniß der Gleichheit genennt wird.

Hierauf folgen diejenigen, deren Benennung eine ganze Zahl wird, als 4:2, wo die Benennung 2 ist. Ferner 12:4, wo die Benennung 3 ist, und 24:6, wo die Benennung 4 ist ꝛc.

Hernach kommen solche vor, deren Benennung durch Brüche ausgedrückt werden. Als 12:9, dessen Benennung $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist: 18:27, dessen Benennung $\frac{2}{3}$ ist ꝛc.

445.

Es sey nun a der Vorsatz, b der Nachsatz, und die Benennung d, so haben wir schon gesehen, daß wenn a und b gegeben, daraus gefunden werde $d = \frac{a}{b}$.

Ist aber der Nachsatz b nebst der Benennung d gegeben, so findet man daraus den Vorsatz $a = bd$, weil bd durch b dividirt, d giebt, endlich, wenn der Vorsatz a nebst der Benennung d gegeben ist, so findet man daraus den Nachsatz $b = \frac{a}{d}$. Denn wenn man den Vorsatz a durch diesen Nachsatz $\frac{a}{b}$ dividiret, so ist der Quotus d, das ist die Benennung.

446.

Ein jedes Verhältniß a:b bleibt unverändert, wenn man den Vorsatz und Nachsatz mit einerley Zahl, entweder multiplicirt, oder dividirt, weil die Benennung einerley bleibt. Denn wenn d die Benennung von a:b ist, also, daß $d = \frac{a}{b}$, so ist auch von diesem Verhältniß na : nb die Benennung $\frac{a}{b} = d$; und von diesem Verhältniß $\frac{a}{n} : \frac{b}{n}$ ist die Benennung gleichfalls $\frac{a}{b} = d$.

447.

Wenn die Benennung in die kleinste Form gebracht worden, so läßt sich daraus das Verhältniß deutlich erkennen und mit Worten ausdrücken. Nämlich, wenn die Benennung auf diesen Bruch $\frac{p}{q}$ gebracht worden, so sagt man; a:b=p:q, das ist, mit Worten a zu b, wie p zu q. Also, da von diesem Verhältniß 6:3 die Benennung $\frac{2}{1}$ ist, oder 2, so hat man 6:3 = 2:1. Eben so sagt man, 18 : 12 = 3 : 2 und 24 : 18 = 4 : 3, und ferner 30 : 45 = 2 : 3. Läßt sich aber die Benennung nicht abkürzen, so wird auch das Verhältniß nicht deutlicher: denn wenn man sagt 9:7=9:7, so wird es nicht begreiflicher.

448.

Wenn sich aber die Benennung auf sehr kleine Zahlen bringen läßt, so erhält man eine deutliche Erkenntniß von einem Verhältniß zwischen zwey sehr großen Zahlen. Also wenn man sagt, 288:144=2:1, so ist die Sache ganz deutlich, und, wenn man fragt,

wie

wie sich 105:70 verhalte, so antwortet man, wie 3:2. Fragt man weiter, wie sich 576:252 verhalte, so antwortet man, wie 16:7.

449.

Um also ein jedes Verhältniß auf das deutlichste vorzustellen, so muß man die Benennung desselben auf die geringste Zahlen zu bringen suchen, welches auf einmal geschehen kann, wenn die beyden Glieder des Verhältnisses durch ihren größten gemeinen Theiler dividiret werden. Also das Verhältniß 576:252 wird auf einmal zu diesem 16:7 gebracht, wenn man die beyden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeiner Theiler ist, dividiret.

450.

Weil nun die Sache darauf ankommt, daß man von zwey gegebenen Zahlen ihren größten gemeinen Theiler zu finden wisse, so soll dazu in dem folgenden Capitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

Capitel 7.

Von dem größten gemeinen Theiler zweyer gegebenen Zahlen.

451.

Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wenn Zähler und Nenner eines Bruchs so beschaffen sind, so läßt sich derselbe auch in keine leichtere Form bringen.

Also

Also sieht man, daß diese beyden Zahlen 48 und 35 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ungeachtet eine jede vor sich ihre besondere Theiler hat. Deswegen kann auch das Verhältniß 48 : 35 nicht leichter ausgedrückt werden, denn ob gleich sich beyde durch 1 theilen lassen, so werden doch dadurch die Zahlen nicht kleiner.

452.

Wenn aber die Zahlen einen gemeinen Theiler haben, so wird derselbe, und so gar der größte gemeine Theiler durch folgende Regel gefunden.

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; durch den überbleibenden Rest dividire man ferner den vorhergehenden Divisor, durch den hier überbleibenden Rest dividire man wieder den letzt vorhergehenden Divisor, und auf solche Art verfahre man so lange bis die Division aufgeht; da denn der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden gegebenen Zahlen seyn wird.

Diese Untersuchung wird für die vorgesetzte Zahlen 576 und 252 also zu stehen kommen.

```
252|576|2
   |504|
   -----
     72|252|3
       |216|
       -----
         36|72|2
           |72|
           ----
             0
```

Hier ist also der größte gemeine Theiler 36.

453.

Es wird dienlich seyn, diese Regel durch einige Exempel zu erläutern. Man suche demnach den größten gemeinen Theiler zwischen den Zahlen 504 und 312.

312 | 504 | 1
| 312 |

192 | 312 | 1
| 192 |

120 | 192 | 1
| 120 |

72 | 120 | 1
| 72 |

48 | 72 | 1
| 48 |

24 | 48 | 2
| 48 |

0

Also ist 24 der größte gemeine Theiler, und deswegen läßt sich das Verhältniß 504:312 auf diese Form 21:13 bringen.

454.

Es seyn ferner diese zwey Zahlen gegeben 625:529, für welche der größte gemeine Theiler gesucht werden soll:

529 | 625 | 1
| 529 |

96 | 529 | 5
| 480 |

49 | 96 | 1
| 49 |

47 | 49 | 1
| 47 |

2 | 47 | 23
| 46 |

1 | 2 | 2
| 2 |

0

Hier

Hier ist also der größte gemeine Theiler 1, und deswegen läßt sich das Verhältniß 625 : 529 auf keine leichtere Form bringen: oder dasselbe läßt sich durch keine kleinere Zahlen ausdrücken.

455.

Es ist nun noch nöthig, den Beweis von dieser Regel zu geben. Es sey a die größere und b die kleinere von den gegebenen Zahlen, d aber ein gemeiner Theiler derselben. Da sich nun so wohl a als b durch d theilen lassen, so wird sich auch $a-b$ dadurch theilen lassen, auch $a-2b$ und $a-3b$, und überhaupt $a-nb$.

456.

Dieses ist auch rückwärts wahr, und wenn die Zahlen b und $a-nb$ sich durch d theilen lassen, so muß sich auch die Zahl a dadurch theilen lassen. Denn da sich nb theilen läßt, so würde sich $a-nb$ nicht theilen lassen, wenn sich nicht auch a theilen ließe.

457.

Ferner ist zu merken, daß, wenn d der größte gemeine Theiler von den beyden Zahlen b und $a-nb$ ist, derselbe auch der größte gemeine Theiler von den Zahlen a und b seyn werde. Denn wenn für diese Zahlen a und b noch ein größerer gemeiner Theiler als d statt fände, so würde derselbe auch ein gemeiner Theiler von b und $a-nb$, folglich d nicht der größte seyn. Nun aber ist d der größte gemeine Theiler von b und $a-nb$, also muß auch d der größte gemeine Theiler von a und b seyn.

458.

Diese drey Sätze voraus gesetzt, so laßt uns die größere Zahl a durch die kleinere b, wie die Regel befiehlt, theilen, und für den Quotus n annehmen, so erhält man den Rest $a-nb$, welcher immer kleiner ist als b. Da nun dieser Rest $a-nb$ mit dem Divisor b eben denselben größten gemeinen Theiler hat als die gege-

bene Zahlen a und b, so theile man den vorigen Divisor b durch diesen Rest a – nb, und da wird wiederum der heraus kommende Rest mit dem nächst vorhergehenden Divisor eben denselben größten gemeinen Theiler haben, und so immer weiter.

459.

Man fährt aber solcher Gestalt fort, bis man auf eine solche Division kommt, welche aufgeht, oder wo kein Rest übrig bleibt. Es sey demnach p der letzte Divisor, welcher just etlichemal in seinem Dividend enthalten ist, daher das Dividend durch p theilbar, und folglich diese Form mp haben wird; diese Zahlen nun p und mp lassen sich beyde durch p theilen, und haben ganz gewiß keinen größern gemeinen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine größere, als sie selbst ist, theilen läßt. Daher ist auch der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorgeschriebenen Regel ist.

460.

Laßt uns noch ein Exempel hersetzen, und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinen Theiler suchen, da denn die Rechnung, wie folget, zu stehen kommen wird

1728	2304	1	
	1728		
	576	1728	3
		1728	
		0	

Also ist 576 der größte gemeine Theiler, und das Verhältniß 1728:2304 wird auf dieses gebracht 3:4; folglich verhält sich 1728:2304 eben so wie 3:4.

Capitel 8.

Von den geometrischen Proportionen.

461.

Zwey geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn ihre Benennungen einander gleich sind: und die Gleichheit zweyer solchen Verhältnisse wird eine geometrische Proportion genennt, welche also geschrieben wird, $a:b=c:d$, mit Worten aber wird dieselbe also ausgesprochen: a verhält sich zu b wie sich c verhält zu d, oder a zu b wie c zu d. Ein Exempel einer solchen Proportion ist nun $8:4=12:6$. Denn von dem Verhältniß $8:4$ ist die Benennung $\frac{2}{1}$, und ebenfalls ist sie es auch von dem Verhältniß $12:6$.

462.

Wenn also $a:b=c:d$ eine geometrische Proportion ist, so muß beyderseits eine gleiche Benennung statt finden, und folglich $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ seyn; und hinwiederum, wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist $a:b=c:d$.

463.

Eine geometrische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche also beschaffen sind, daß das erste durch das zweyte dividirt eben so viel ist, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folget eine sehr wichtige Haupteigenschaft aller geometrischen Proportionen, welche darinn besteht, daß das Product aus dem ersten und vierten Glied immer eben so groß ist,

 als

als das Product aus dem zweyten und dritten. Oder kürzer, daß das Product der äußern gleich ist dem Product der mittlern Glieder.

464.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, so sey $a:b = c:d$ eine geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Man multiplicire einen jeden dieser Brüche mit b, so bekommt man $a = \frac{bc}{d}$, diese multiplicirt man ferner beyderseits mit d, so bekommt man $ad = bc$. Nun aber ist ad das Product der äußern Glieder, und bc das Product der mittlern, welche beyde Producte folglich einander gleich sind.

465.

Wenn hinwiederum vier Zahlen a, b, c, d, so beschaffen sind, daß das Product der äußern ad gleich ist dem Product der mittlern bc, so stehen dieselben in einer geometrischen Proportion. Denn da $ad = bc$, so dividire man beyderseits durch bd, da bekommt man $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; daher wird $a:b = c:d$.

466.

Die vier Glieder einer geometrischen Proportion als $a:b = c:d$ können auf verschiedene Arten versetzt werden, so, daß die Proportion bleibt. Es kommt nämlich nur darauf an, daß das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich bleibe, oder, daß $ad = bc$. Also wird man haben, erstlich $b:a = d:c$, zweytens $a:c = b:d$, drittens $d:b = c:a$, viertens $d:c = b:a$.

467.

Außer diesen lassen sich auch noch viele andere geometrische Proportionen herleiten. Denn wenn $a:b=c:d$ so ist erstlich $a+b:a$ oder das erste + dem andern zum ersten, wie $c+d:c$, oder das dritte + dem vierten zum dritten; nämlich $a+b:a=c+d:c$.

Hernach ist auch das erste − dem andern zum ersten, wie das dritte − dem vierten zum dritten; oder $a-b:a=c-d:c$.

Denn nimmt man die Producte der äußern und mittlern Glieder, so ist offenbar $ac-bc=ac-ad$, weil $ad=bc$. Ferner wird auch $a-b:b=c-d:d$, weil $ad-bd=bc-bd$ und $ad=bc$ ist.

468.

Alle hergeleitete Proportionen, die aus $a:b=c:d$ entstehen, können auf eine allgemeine Art also vorgestellt werden $ma+nb:pa+qb=mc+nd:pc+qd$. Denn das Product der äußern Glieder ist $mpac+npbc+mqad+nqbd$, oder weil $ad=bc$, so wird dasselbe $mpac+npbc+mqbc+nqbd$; das Product der mittlern Glieder aber ist $mpac+mqbc+npad+nqbd$, oder weil $ad=bc$, so wird dasselbe $mpac+mqbc+npbc+nqbd$, welches mit jenem einerley ist.

469.

Also kann man aus einer gegebenen Proportion als z. E. $6:3=10:5$, unendlich viel andere herleiten, wovon wir einige hersetzen wollen:

$3:6=5:10$, $6:10=3:5$, $9:6=15:10$,
$3:3=5:5$, $9:15=3:5$, $9:3=15:5$,

470.

Da in einer geometrischen Proportion das Product der äußern dem Product der mittlern Glieder gleich ist,

 so

so kann man, wenn die drey ersten Glieder bekannt sind, aus derselben das vierte finden. Es seyn die drey ersten Glieder 24 : 15 = 40 zu .... Denn da hier das Product der mittlern 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten, das ist, mit 24 multiplicirt, auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und da wird der Quotus das gesuchte vierte Glied 25 geben. Daher ist die Proportion 24 : 15 = 40 : 25. Und wenn allgemein die drey ersten Glieder a : b = c : ... sind, so setze man für das unbekannte vierte Glied den Buchstaben d, und da ad = bc seyn muß, so dividire man beyderseits durch a, und man wird bekommen $d = \frac{bc}{a}$; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$, und wird gefunden, wenn man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt, und das Product durch das erste Glied dividirt.

471.

Hierauf beruhet nun der Grund, der in allen Rechenbüchern so berühmten Regel detri, weil darinn aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer geometrischen Proportion stehet, also, daß sich die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten.

472.

Hierbey kommen noch einige besondere Umstände zu bemerken vor: als wenn zwey Proportionen einerley erstes und drittes Glied haben, wie in diesen a : b = c : d und a : f = c : g, so werden auch die zweyten den vierten proportional seyn, es wird sich nämlich verhalten b : d = f : g; denn da aus der ersten folgt a : c = b : d, und aus der andern a : c = f : g, so sind die Verhältnisse b : d und f : g einander gleich, weil ein jedes dem Verhältnisse a : c

gleich

gleich ist. Also da $5:100 = 2:40$ und $5:15 = 2:6$, so folgt daraus, daß $100:40 = 15:6$.

473.

Wenn aber zwey Proportionen so beschaffen sind, daß sich einerley mittlere Glieder darinn befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten, wie die vierten. Wenn nämlich $a:b=c:d$ und $f:b=c:g$, so wird daraus folgen $a:f = g:d$. Es sey z.E. diese Proportion gegeben $24:8 = 9:3$ und $6:8 = 9:12$, so wird daraus folgen $24:6 = 12:3$. Der Grund davon ist offenbar: weil die erste giebt $ad=bc$, und die zweyte $fg=bc$, folglich wird $ad=fg$, und $a:f = g:d$, oder $a:g = f:d$.

474.

Aus zwey gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wenn man besonders die ersten und die zweyten, die dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen $a:b=c:d$ und $e:f=g:h$ entstehet durch die Zusammensetzung diese $ae:bf = cg:dh$. Denn da erstlich $ad = bc$ und aus der zweyten $eh = fg$, so wird auch seyn $adeh = bcfg$. Nun aber ist $adeh$ das Product der äußern und $bcfg$ das Product der mittlern Glieder in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

475.

Es seyn z.E. diese zwey Proportionen gegeben $6:4 = 15:10$ und $9:12 = 15:20$, so giebt uns derselben Zusammensetzung folgende Proportion:

$$6.9:4.12 = 15.15:10.20$$

das ist $54:48 = 225:200$

oder $9:8 = 9:8$

476.

Zuletzt ist hier noch zu merken, daß wenn zwey Producte einander gleich sind, als $ad = bc$, daraus hinwiederum eine geometrische Proportion formiret werden kann. Es ist nämlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweyten, wie der andere Factor des zweyten zum andern des ersten. Es wird nämlich seyn $a : c = b : d$. Da z. E. $3 . 8 = 4 . 6$, so folgt daraus diese Proportion $8 : 4 = 6 : 3$, oder $3 : 4 = 6 : 8$; und da $3 . 5 = 1 . 15$, so bekommt man $3 : 15 = 1 : 5$, oder $5 : 1 = 15 : 3$, oder $3 : 1 = 15 : 5$.

Capitel 9.

Anmerkungen über die Proportionen und ihren Nutzen.

477.

Diese Lehre ist in dem allgemeinen Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann. Die Preiße und Waaren sind einander immer proportional, und bey den verschiedenen Geldsorten kommt alles darauf an, die Verhältnisse darzwischen zu bestimmen. Dieses wird sehr dienlich seyn, um die vorgetragene Lehre besser zu erläutern und zum Nutzen anzuwenden.

478.

Will man das Verhältniß zwischen zweyen Münzsorten z. E. einem Louisd'or und einem Ducaten erforschen, so muß man sehen, wie viel diese Stücke nach einerley Münzsorte gelten. Also, da in Berlin ein Louisd'or 5 Rthl. 8 Gl., ein Ducaten aber 3 Rthl. gilt,

so

so darf man diese beyden Werthe nur auf einerley Münze bringen, entweder auf Thaler, und da bekommt man diese Proportion, 1 L. : 1 D. = $5\frac{1}{3}$ Rthl. : 3 Rthl. d. i. wie 16 : 9. Oder in Groschen hat man diese Proportion 1 L. : 1 D. = 128 : 72 = 16 : 9, und aus einer solchen Proportion erhält man die Vergleichung zwischen Louisd'ors und Ducaten, indem die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder giebt 9 Louisd'or = 16 Ducaten; und durch Hülfe dieser Vergleichung kann man eine jede Summe Louisd'or in Ducaten verwandeln. Also, wenn man gefragt wird, wie viel 1000 Louisd'or in Ducaten betragen, so macht man diese Regel detri. 9 L'd'or thun 16 Ducat. was 1000 L'd'or: Antwort; $1777\frac{7}{9}$ Ducaten.

Fragt man aber, wie viel 1000 Duc. in L'd'or betragen, so setzt man diese Regel detri; 16 Duc. thun 9 L'd'or, was 1000. Antwort; $562\frac{1}{2}$ L'd'or.

479.

Hier in St. Petersburg ist der Werth eines Ducaten veränderlich, und beruhet auf den Wechselcours, wodurch der Werth eines Rubels in holländische Stüber bestimmt wird, deren 105 einen Ducaten ausmachen.

Wenn also der Cours 45 Stüber ist, so hat man diese Proportion, 1 Rbl. : 1 D. = 45 : 105 = 3 : 7, und daher diese Vergleichung; 7 Rbl. = 3 Duc. Hieraus kann man finden, wie viel ein Ducaten in Rubeln betrage: denn 3 D. : 7 Rbl. = 1 D. : ... Antwort $2\frac{1}{3}$ Rubel. Ist aber der Cours 50 Stüber, so hat man diese Proportion 1 Rbl. : 1 D. = 50 : 105 = 10 : 21, und daher diese Vergleichung 21 Rbl. = 10 Duc. Hieraus wird 1 Duc. = $2\frac{1}{10}$ Rubl. Ist aber der Cours nur 44 Stüber, so hat man 1 Rbl. : 1 Duc. = 44 : 105, und also 1 Duc. = $2\frac{17}{44}$ Rbl. = 2 Rbl. $38\frac{7}{11}$ Cop.

480.

Hieraus kann man auch mehr als zwey verschiedene Münzsorten unter sich vergleichen, welches insonderheit bey Wechseln häufig geschieht. Um davon ein Exempel zu geben, so soll jemand von hier 1000 Rubel nach Berlin übermachen, und will wissen, wie viel solches in Berlin in Ducaten betragen werde. Es ist aber der hiesige Cours $47\frac{1}{2}$ Stüber (nämlich ein Rbl. macht $47\frac{1}{2}$ Stüber Holländisch). Hernach in Holland machen 20 Stüber einen Fl. Holl. Ferner $2\frac{1}{2}$ Fl. Holl. machen einen Species Rthl. Holl. Ferner ist der Cours von Holland nach Berlin 142, das ist, für 100 Spec. Rthl. zahlt man in Berlin 142 Rthlr. Endlich gilt 1 Duc. in Berlin 3 Rthlr.

481.

Um diese Frage aufzulösen, so wollen wir erstlich Schritt vor Schritt gehen. Wir fangen also bey den Stübern an, und da 1 Rbl. = $47\frac{1}{2}$ Stüber, oder 2 Rbl. = 95 Stüb. so setzt man, 2 Rbl. : 95 Stüb. = 1000 ... Antwort 47500 Stüb. Ferner gehen wir weiter, und setzen 20 Stüb. : 1 Fl. = 47500 Stüber : .... Antwort 2375 Fl.

Ferner, da $2\frac{1}{2}$ Fl. = 1 Sp. Rthl., das ist, da 5 Fl. = 2 Sp. Rthl., so setzt man 5 Fl. : 2 Sp. Rthl. = 2375 Fl. zu .... Antwort 950 Sp. Rthl.

Ferner gehen wir auf Berliner Rthl. nach dem Cours zu 142: Also 100 Sp. Rthl. : 142 Rthl. = 950 : Antwort 1349 Rthl.

Nun gehen wir endlich zu den Ducaten, und setzen also: 3 Rthl. : 1 Ducaten = 1349 Rthl. zu ... Antwort $449\frac{2}{3}$ Ducaten.

482.

Um solche Rechnungen noch mehr zu erläutern, so wollen wir setzen, der Banquier zu Berlin mache

Schwie-

Schwierigkeit, diese Summe zu bezahlen, unter einem oder andern Vorwand, was es auch für einer seyn mag, und wolle diesen Wechsel nicht anders als mit 5 Procent Abzug bezahlen. Dieses ist aber also zu verstehen, daß er anstatt 105 nur 100 bezahlt, daher muß noch diese Regel detri hinzu gefügt werden, 105 : 100 = $449\frac{2}{3}$ zu.... Giebt also $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

483.

Hierzu wurden nun sechs Rechnungen nach der Regel detri erfordert: man hat aber Mittel gefunden, diese Rechnungen ungemein abzukürzen, durch Hülfe der sogenannten Kettenregel. Um dieselbe zu erklären, so laßt uns von den sechs obigen Rechnungen die zwey Vordersätze in Betrachtung ziehen, und hier vor Augen legen:

I.) 2 Rbl. : 95 Stüb.	II.) 20 Stüb. : 1 Fl. Holl.
III.) 5 Fl. Holl. : 2 Sp. Rthl.	IV.) 100 Sp. Rthl. : 142 Rth.
V.) 3 Rthl. : 1 Sp. Ducaten	VI.) 105 Duc. : 100 Duc.

Wenn wir nun die obigen Rechnungen betrachten, so finden wir, daß wir die vorgegebene Summe immer durch die zweyten Sätze multiplicirt, und durch die ersten dividirt haben; daraus ist klar, daß man eben dieses finden werde, wenn man die vorgegebene Summe auf einmal mit dem Product aller zweyten multiplicirt, und durch das Product aller ersten Sätze dividirt; oder, wenn man diese einzige Regel detri macht: wie sich das Product aller ersten Sätze verhält zu dem Product aller zweyten Sätze, also verhält sich die gegebene Anzahl Rubel zu der Anzahl Ducaten, die in Berlin bezahlt wird.

484.

Diese Rechnung wird noch mehr abgekürzt, wenn sich irgend ein erster Satz gegen irgend einen zweyten

Satz

Satz aufheben läßt, da man denn dieselben Sätze ausstreicht, und an ihrer Stelle die Quotus setzt, welche man durch die Aufhebung erhält: Auf diese Art wird obiges Exempel also zu stehen kommen:

Rbl.	~~2~~.	19. ~~98~~ St. Holl. Cur.	1000 Rbl.
	~~20~~.	1 Hol. Fl.	
	~~8~~.	~~2~~ Sp. Rthl.	
	100.	142 Rthl.	
	3.	1 Duc.	
	~~103~~. 21.	~~8~~, ~~100~~ Duc.	

63~~00~~ : 2698 = 10~~00~~ zu ...

7) 26980

9) 3854 (2

428 (2 Antwort $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

485.

Um die Kettenregel zu gebrauchen, so muß man diese Ordnung beobachten; man fängt mit eben der Münzsorte an, von welcher die Frage ist, und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit welcher das folgende Verhältniß wieder angefangen, und dieselbe mit einer dritten verglichen wird, so, daß ein jedes Verhältniß mit eben der Münzsorte anfängt, mit welcher das vorige aufgehört, und so fährt man fort, bis man auf diejenige Sorte kommt, in welcher die Antwort stehen soll, und zuletzt werden noch die Spesen oder Unkosten berechnet.

486.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch etliche Fragen beysetzen.

Wenn die Ducaten in Hamburg 1 p. C. besser sind als 2 Rthl. B° (das ist, wenn 50 Duc. nicht 100, sondern 101 Rthl. B°. machen) und der Cours zwischen Hamburg und Königsberg 119 Gr. Pohln. ist, (das ist, 1 Rthl. B°. macht 119 Gr. Pohln.) wie viel betragen 1000 Duc. in Fl. Pohl. (30 gr. Pohl. machen 1 Fl. Pohl.)

Duc

Duc. 1 : 2 Rthl. B° 1000 Duc.
1ØØ, 50 : 101 Rthl. B°
1 : 119 Gr. Pohl.
30 : 1 Fl. Pohl.

15ØØ 12019 = 10ØØ Duc. zu . . .

3) 120190

5) 40063 (1

8012 (3 Antwort 8012 $\frac{2}{3}$ Fl. Pohl.

487.

Noch zu mehrerer Abkürzung kann die Fragzahl über die zweyte Reihe gesetzt werden, da denn das Product der zweyten Reihe, durch das Product der ersten dividirt, die verlangte Antwort giebt.

Frage: Leipzig läßt aus Amsterdam Ducaten kommen, welche daselbst 5 Fl. 4 St. Courant gelten, (das ist, ein Duc. gilt 104 St. oder 5 Duc. machen 26 Fl. Hol.) Wenn nun Agio di B° in Amsterdam 5 p. C. (das ist 105 Cour. macht 100 B°.) und der Wechselcours von Leipzig nach Amsterdam in B°. 133 $\frac{1}{4}$ p. C. (das ist, für 100 Rthl. zahlt man in Leipzig 133 $\frac{1}{4}$ Thl.) Endlich 2 Rthl. Hol. 5 Fl. Hol. thun, wie viel sind nach diesen Coursen vor solche 1000 Ducaten in Leipzig an Thl. zu bezahlen.

8, 1ØØØ Duc.

Duc. 8 : 26 Fl. Hol. Cour.
1Ø8, 21 : 4, 2Ø, 1ØØ Fl. Hol. B°.
8 : 2 Rthl. Hol. B°.
4ØØ, 2 : 533 Thl. in Leipzig.

21 : 3) 55432 (1

7) 18477 (4

2639

Antwort 2639 $\frac{13}{21}$ Thl.
oder 2639 Thl. 15 gut. Grsch.

Capitel

Capitel 10.

Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

488.

Zwey oder mehr Verhältnisse werden zusammengesetzt, wenn man so wohl die Vordersätze als die Hintersätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdenn sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beyden Producten zusammengesetzt sey aus den zwey oder mehr gegebenen Verhältnissen.

Also aus diesen Verhältnissen a:b, c:d, e:f entsteht durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß ace : bdf.

489.

Da ein Verhältniß einerley bleibt, wenn man seine beyde Glieder durch einerley Zahl dividirt oder abkürzt, so kann man die obige Zusammensetzung ungemein erleichtern, wenn man die Vordersätze gegen die Hintersätze aufhebt oder abkürzt, wie schon im vorigen Capitel geschehen.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnissen wird das daraus Zusammengesetzte solcher Gestalt gefunden.

Die gegebenen Verhältnisse sind:

12 : 25, 28 : 33 und 55 : 56

~~12~~, ~~4~~, 2 : 5 ~~25~~

~~28~~ : ~~3~~, ~~33~~

~~55~~, ~~5~~ : ~~2~~, ~~56~~

---

2 : 5

Also erhält man durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß 2:5.

490.

Eben dieses geht auch auf eine allgemeine Art bey den Buchstaben an; und ist insonderheit dieser Fall merkwürdig, wo immer ein Vordersatz dem vorigen Hintersatz gleich ist. Also, wenn die gegebenen Verhältnisse sind

$$\begin{array}{c} a : b \\ b : c \\ c : d \\ d : e \\ e : a \\ \hline \end{array}$$

so ist das zusammengesetzte Verhältniß, wie 1 : 1

491.

Um den Nutzen dieser Lehre zu zeigen, so bemerke man, daß zwey viereckigte Felder unter sich ein solches Verhältniß haben, welches zusammengesetzt ist aus den Verhältnissen ihrer Längen und ihrer Breiten.

Es seyn z. E. zwey solche Felder A und B. Von jenem sey die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Von diesem sey die Länge 360 Fuß, und die Breite 100 Fuß; so ist das Verhältniß der Länge wie 500:360, und der Breite wie 60:100. Also stehet es

$$\begin{array}{c} \cancel{500},\ 5 : 6,\ \cancel{360} \\ \cancel{60} \quad : \quad \cancel{100} \\ \hline 5 : 6 \end{array}$$

Also verhält sich das Feld A zu dem Feld B wie 5 zu 6.

492.

Ein anderes Exempel. Das Feld A sey 720 Fuß lang und 88 Fuß breit: das Feld B aber sey 660 Fuß lang und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwey Verhältnisse zusammensetzen:

Verhält-

Verhältniß der Längen 720, 8 : 15, 60, 660
Verhältniß der Breiten 88, 8, 2 : 90

16 : 15

Und dieses ist das Verhältniß der Felder A und B.

493.

Um ferner den Raum oder Inhalt zweyer Zimmer gegen einander zu vergleichen, so ist zu wissen, daß ihr Verhältniß aus dreyen zusammengesetzt ist. Nämlich, aus dem Verhältniß der Länge, der Breite und der Höhe. Es sey z. E. ein Zimmer A, dessen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß, und die Höhe = 14 Fuß. Von einem andern Zimmer B aber sey die Länge = 42 Fuß, die Breite = 24 Fuß, und die Höhe = 10 Fuß, so sind die drey Verhältnisse.

der Länge 36, 6, 3 : 42, 6
der Breite 16, 2, : 24, 3
der Höhe 14, 2, : 10, 5

4 : 5

Also ist der Inhalt des Zimmers A zu dem Inhalt des Zimmers B wie 4 zu 5.

494.

Wenn die Verhältnisse, welche man solcher Gestalt zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen daher vervielfältigte Verhältnisse. Nämlich aus zwey gleichen entsteht ein verdoppeltes oder quadratisches Verhältniß; aus drey gleichen ein dreyfältiges oder cubisches, und so fort. Also aus den Verhältnissen $a:b$ und $a:b$ ist das zusammengesetzte Verhältniß $aa:bb$; daher sagt man, die Quadraten stehen in einer gedoppelten Verhältniß ihrer Wurzel. Und aus dem Verhältniß $a:b$ dreymal gesetzt, entsteht das Verhältniß $a^3:b^3$, daher sagt man, daß die Cubi ein dreyfältiges Verhältniß ihrer Wurzel haben.

495.

495.

In der Geometrie wird gezeigt, daß sich zwey Cirkelrunde Plätze in den gedoppelten Verhältnissen ihrer Durchmesser verhalten, das will so viel sagen, daß sie sich verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Es sey ein solcher Platz A, dessen Durchmesser = 45 Fuß, eines andern Cirkelrunden Platzes B aber Durchmesser sey = 30 Fuß, so wird sich jener Platz zu diesem verhalten wie 45. 45 zu 30. 30, oder ihr Verhältniß ist aus diesen zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetzt

$$\begin{array}{c} \not{45},\ \not{9},\ 3 : \not{30},\ \not{6},\ 2 \\ \underline{\not{45},\ \not{9},\ 3 : \not{30},\ \not{6},\ 2} \\ 9 : 4 \end{array}$$

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

496.

Ferner wird auch bewiesen, daß sich die Inhalte runder Kugeln, wie die Cubi ihrer Durchmesser verhalten. Wenn also der Durchmesser einer Kugel A ein Fuß ist, und einer andern Kugel B zwey Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel A sich zum Inhalt der Kugel B verhalten, wie $1^3 : 2^3$, oder wie $1 : 8$.

Wenn also diese Kugeln aus einerley Materie bestehen, so wird die Kugel B achtmal schwerer seyn als die Kugel A.

497.

Hieraus kann man das Gewicht der Kanonenkugeln aus ihren Durchmessern finden, wenn man nur von einer das Gewicht hat. Es sey z. E. eine Kugel A, deren Durchmesser = 2 Zoll, und die fünf ℔. schwer ist, man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel B, deren Durchmesser 8 Zoll ist. Hier hat man nun diese Proportion $2^3 : 8^3 = 5 :$ Giebt 320 ℔., und dieses ist das

Gewicht der Kugel B. Von einer andern Kugel C aber, deren Durchmesser = 15 Zoll wird das Gewicht gefunden

$2^3 : 15^3 = 5 : \ldots$ Antwort $2109\frac{3}{8}$ ℔.

498.

Sucht man das Verhältniß zweyer Brüche, als $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, so kann dasselbe immer durch ganze Zahlen ausgedrückt werden: denn man darf nur beyde Brüche mit bd multipliciren, so kommt dieses Verhältniß ad : bc heraus, welches jenem gleich ist, daher diese Proportion entsteht $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Läßt sich nun ad gegen bc noch abkürzen, so wird das Verhältniß noch leichter. Also $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15.36 : 24.25 = 9 : 10$.

499.

Es wird ferner gefragt, wie sich diese Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gegen einander verhalten, da ist denn so gleich klar, daß seyn werde $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$, welches also mit Worten ausgesprochen wird: Daß sich zwey Brüche, deren Zähler 1 sind, unter sich verhalten, umgekehrt, wie ihre Nenner. Dieses gilt auch von zweyen Brüchen, welche gleiche Zähler haben. Denn da $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, so sind sie gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwey Brüche gleiche Nenner, als $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zähler, nämlich wie a : b. Also ist $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$ und $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ oder 2 : 3.

500.

500.

Bey dem freyen Fall der Cörper hat man bemerket, daß in einer Secunde ein Cörper 15 Fuß tief herab falle, in zwey Secunden aber falle er durch eine Höhe von 60 Fuß, und in drey Secunden 135 Fuß, daraus hat man nun geschlossen, daß sich die Höhen verhalten wie die Quadraten der Zeiten; und also auch rückwärts die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Höhen.

Fragt man nun, wie viel Zeit ein Stein brauche, um aus einer Höhe von 2160 Fuß herunter zu fallen: so ist 15 : 2160 = 1 : Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst 12 Secunden.

501.

Man fragt, wie tief ein Stein in einer Stunde herunter fallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Man sagt also: wie die Quadraten der Zeiten, das ist, wie $1^2 : 3600^2$, also verhält sich die gegebene Höhe = 15 Fuß, zu der gesuchten Höhe

1 : 12960000 = 15 zu ...
15
64800000
1296
194400000 Antwort 194400000 Fuß.

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine teutsche Meile, so wird diese Höhe seyn 8100 Meilen, welche Höhe größer ist als die ganze Erde dicke ist.

502.

Eine gleiche Bewandniß hat es mit dem Preiß der Edelgesteine, welche sich nicht nach ihrem Gewicht selbst, sondern nach einem größern Verhältniß richten.

Bey den Diamanten gilt diese Regel, daß sich der Preiß wie das Quadrat des Gewichts verhalte, oder das Verhältniß der Preiße ist gleich dem gedoppelten Verhältnisse des Gewichts. Dieselben werden nun nach einem Gewicht, welches ein Karath genennt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wenn nun ein Diamant von einem Karath zwey Rubel gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so vielmal mehr gelten, als das Quadrat von 100 größer ist wie das Quadrat von 1. Also muß die Regel detri so gesetzt werden,

$1^2 : 100^2 = 2$ Rubel:

oder $1 : 10000, = 2$ Rbl. zu ... Antwort 20000 Rbl.

In Portugall befindet sich ein Diamant von 1680 Karath, dessen Preiß demnach also gefunden wird.

$1^2 : 1680^2 = 2$ Rubel, : – oder

$1 : 2822400 = 2 : \ldots$ Antwort 5644800 Rubel.

503.

Von zusammengesetzten Verhältnissen geben die Posten ein merkwürdiges Exempel, weil das Postgeld nach einem zusammengesetzten Verhältnisse der Zahl der Pferde, und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wenn also für ein Pferd auf eine Meile 8 Gl. oder $\frac{1}{3}$ Rthl. bezahlt wird, und man wissen will, wie viel vor 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden soll? so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist 1:28, darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen 2:9, und setzt die zwey Verhältnisse zusammen

2:252, oder kürzer $1 : 126 = \frac{1}{3}$ zu ... Antwort 42 Rthl.

Wenn man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie hoch kommen 30 Pferde auf 4 Meilen zu stehen? hier kommt die Rechnung also zu stehen.

$$\begin{array}{c} \not{8},\ \not{2} : \not{3}\not{0},\ \not{1}\not{5},\ 5 \\ \underline{\not{3} : \not{4}} \\ 1 : 5 = 1 \text{ Ducaten} : - \end{array}$$

Daher ist die Bezahlung 5 Ducaten. 504.

504.

Bey den Arbeitern kommt diese Zusammensetzung der Verhältnisse auch vor, da die Bezahlung nach der zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter, und der Zahl der Tage geschehen muß.

Wenn also z. E. einem Mäurer täglich 10 Gr. gegeben wird, und man will wissen, wie viel an 24 Mäurer, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden soll? so steht die Rechnung also:

1 : 24
1 : 50
———
1 : 1200 = 10 Gl. : 500 Rthl.
10
———
12000 Gl.
3)———
4000
8)———
500 Rthl.

Weil in dergleichen Exempeln fünf Sätze gegeben sind, so wird in den Rechenbüchern die Art, dieselben zu berechnen, die Regula Quinque genennt.

Capitel II.

Von den geometrischen Progressionen.

505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine geometrische Progression genennt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben geometrischen Verhältnisse stehet, und die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende,

wird der Nenner genennt, wenn also das erste Glied 1 ist, und der Nenner = 2, so ist die geometrische Progression folgende:

Glieder 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Prog. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 ꝛc.

wo wir die Zeichen darüber gesetzt haben, um anzuzeigen, das wie vielte Glied ein jedes sey.

506.

Wenn man überhaupt das erste Glied = a und den Nenner = b setzt, so kommt die geometrische Progression also zu stehen:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. . . n
Prog. $a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, ab^6, ab^7 \ldots ab^{n-1}$.

Wenn also diese Progression aus n Gliedern besteht, so ist das letzte $= ab^{n-1}$. Hier ist zu merken, wenn der Nenner b größer ist als 1, daß die Glieder immer größer werden, ist aber der Nenner $b = 1$, so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner b kleiner als 1, oder ein Bruch, so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wenn $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese geometrische Progression:

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$ ꝛc.

507.

Hierbey kommen nach folgende Stücke zu betrachten vor:

I.) das erste Glied, welches hier a genennt wird
II.) der Nenner, welcher hier b genennt wird
III.) die Anzahl der Glieder, welche = n gesetzt worden
IV.) das letzte Glied, welches gefunden worden $= ab^{n-1}$.

Daher, wenn die drey ersten Stücke gegeben sind, so wird das letzte Glied gefunden, wenn man die $n-1$ste Potestät des Nenners b, das ist b^{n-1}, mit dem ersten Glied a multiplicirt.

Wollte

Wollte man nun von dieser geometrischen Progression 1, 2, 4, 8 ꝛc. das 50ste Glied wissen, so ist hier $a=1$, $b=2$ und $n=50$. Daher das 50ste Glied seyn wird $=2^{49}$. Da nun $2^9=512$, so ist $2^{10}=1024$. Hiervon das Quadrat genommen, giebt $2^{20}=1048576$. Hiervon wieder das Quadrat genommen, giebt $2^{40}=1099511627776$. Wenn man nun 2^{40} mit $2^9=512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49}=512 \cdot 1099511627776=562949953421312$.

508.

Hiebey pflegt nun insonderheit gefragt zu werden, wie man die Summe von allen Gliedern einer solchen Progression finden soll, welches wir hier folgender Gestalt zeigen wollen. Es sey erstlich diese Progression von zehn Gliedern gegeben 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, wovon wir die Summe durch den Buchstaben s andeuten wollen, also, daß

$$s=1+2+4+8+16+32+64+128+256+512$$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$$2s=2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024.$$

Hiervon nehme man nun die obige Progression weg, so bleibt übrig:

$s=1024-1=1023$; also ist die gesuchte Summe $=1023$.

509.

Laßt uns nun bey eben dieser Progression die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen, und $=n$ setzen, also, daß die Summe seyn wird $s=1+2+2^2+2^3 \ldots\ldots 2^{n-1}$. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt $2s=2+2^2+2^3+2^4 \ldots\ldots 2^n$, von diesen subtrahirt man jenes, so bekommt man $s=2^n-1$. Daher wird die gesuchte Summe gefunden, wenn man das letzte Glied 2^{n-1} mit dem Nenner 2 multiplicirt, um zu bekommen 2^n, und von diesem Product 1 subtrahirt.

510.

Dieses wollen wir durch folgende Exempel, indem wir vor n nach und nach 1, 2, 3, 4, schreiben werden, erläutern, als: $1=1$, $1+2=3$, $1+2+4=7$, $1+2+4+8=15$, $1+2+4+8+16=31$, $1+2+4+8+16+32=63$ rc.

511.

Hier pflegt diese Frage vorzukommen: Einer verkauft sein Pferd nach den Hufnägeln, deren 32 sind: für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pfennig, für den dritten 4 Pfennig, für den vierten 8 Pfennig, und immer für den folgenden zweymal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also diese geometrische Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, rc. bis auf das 32ste Glied fortgesetzt, und die Summe von allen gesucht werden. Da nun das letzte Glied seyn wird $=2^{31}$, so ist oben schon gefunden worden $2^{20}=1048576$, dieses multiplicirt man mit $2^{10}=1024$, um zu haben $2^{30}=1073741824$. Dieses mit 2 multiplicirt, giebt das letzte Glied $2^{31}=2147483648$; folglich wird die Summe gleich seyn dieser Zahl doppelt genommen weniger 1: das ist 4294967295 Pfennige.

2) 4294967295 Pf.

6) 2147483647 (1.

oder 357913941 Gl. 3 Pf.

3) 357913941

8) 119304647

oder 14913080 Rthl. 21 Gl. 3 Pf.

Also wird der Preiß des Pferdes seyn 14913080 Rthl. 21 Gl. 3 Pf.

512.

Es sey nun der Nenner = 3, und die geometrische Progression sey 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe so lange = s, also, daß:

$$s = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729.$$

Man multiplicire mit 3, um zu haben

$$3s = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

Hiervon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2s = 2187 - 1 = 2186$. Daher ist die gedoppelte Summe = 2186, und folglich die Summe 1093.

513.

In eben dieser Progression sey die Anzahl der Glieder = n, und die Summe = s, also, daß $s = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^{n-1}$, dieses mit 3 multiplicirt, giebt $3s = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots 3^n$. Hiervon subtrahire man das obige, und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer den letzten, gegen alle Glieder der obern, außer den ersten, aufheben, so bekommt man $2s = 3^n - 1$, und also $s = \frac{3^n - 1}{2}$.

Also wird die Summe gefunden, wenn man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt, und den Rest durch 2 theilt, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen; $1 = 1$, $1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4$, $1 + 3 + 9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13$, $1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3 \cdot 27 - 1}{2} = 40$, $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2} = 121$.

514.

Nun sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, der Nenner $= b$, die Anzahl der Glieder $= n$, und die Summe derselben $= s$, also, daß

$$s = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^{n-1}.$$

Dieses werde multiplicirt mit b, so bekommt man $bs = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \ldots ab^n$. Hiervon subtrahire man das obige, so erhält man $(b-1) . s = ab^n - a$. Daher bekommt man die gesuchte Summe $s = \frac{ab^n - a}{b - 1}$. Daher wird die Summe einer jeglichen geometrischen Progression gefunden, wenn man das letzte Glied mit dem Nenner der Progression multiplicirt, von dem Product das erste Glied subtrahirt, und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.

515.

Man habe eine geometrische Progression von 7 Gliedern; das erste $= 3$, und der Nenner $= 2$, so ist $a = 3$, $b = 2$, und $n = 7$, folglich das letzte Glied $3 . 2^6$, das ist $3 . 64 = 192$, und die Progression selbst

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192.$$

und also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt, giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt, bleibt 381, dieser Rest durch $b-1$, das ist, durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summe der Progression ist.

516.

Es sey ferner gegeben eine geometrische Progression von sechs Gliedern, davon das erste 4, und der Nenner $\frac{3}{2}$. Also, daß die Progression ist:

$$4,\ 6,\ 9,\ \frac{27}{2},\ \frac{81}{4},\ \frac{243}{8}$$

dieses letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multiplicirt, giebt $\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt, giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b-1 = \frac{1}{2}$, giebt $\frac{665}{8} = 8\ \frac{1}{8}$.

517.

Wenn der Nenner kleiner ist als 1, und also die Glieder der Progression immer abnehmen, so kann die Summe einer solchen Progression, die ohne Ende fortläuft, angegeben werden.

Es sey z. E. das erste Glied $=1$, der Nenner $=\frac{1}{2}$, und die Summe $=s$, also, daß

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64} \text{ ꝛc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire mit 2, so bekommt man:

$$2s=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} \text{ ꝛc. ohne Ende.}$$

Hiervon ziehe man das obige ab, so bleibt $s=2$, welches die Summe der unendlichen Progression ist.

518.

Es sey ferner das erste Glied $=1$, der Nenner $\frac{1}{3}$, und die Summe $=s$, also, daß

$$s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81} \text{ ꝛc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire alles mit 3, so hat man

$$3s=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81} \text{ ꝛc. ohne Ende.}$$

Hiervon nehme man die obige Reihe weg, so bleibt $2s=3$, folglich ist die Summe $=1\frac{1}{2}$.

519.

Es sey ferner das erste Glied $=2$, der Nenner $=\frac{3}{4}$, die Summe $=s$, also, daß $s=2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$ ꝛc. ohne Ende. Dieses multiplicire man mit $\frac{4}{3}$, so hat man $\frac{4}{3}s=\frac{8}{3}+2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$ ꝛc. ohne Ende. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt $\frac{1}{3}s=\frac{8}{3}$, also die Summe selbst wird seyn just 8.

520.

Wenn überhaupt das erste Glied gesetzt wird $=a$, und der Nenner der Progression $=\frac{b}{c}$, so, daß dieser Bruch kleiner ist als 1, und folglich b kleiner ist als c, so

so kann die Summe dieser unendlichen Progression folgender Gestalt gefunden werden. Man setzt

$$s = a + \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Hier multiplicirt man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Dieses subtrahirt man von dem obigen, so bleibt $(1 - \frac{b}{c})s = a$,

$$\text{folglich ist } s = \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$$

Multiplicirt man nun oben und unten mit c, so bekommt man $s = \frac{ac}{c-b}$, daher ist die Summe dieser unendlichen geometrischen Progression $= \frac{a}{1 - \frac{b}{c}}$ oder $= \frac{ac}{c-b}$.

Diese Summe wird folglich gefunden, wenn man das erste Glied a dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder man subtrahirt den Nenner von 1, und durch den Rest dividirt man das erste Glied, so bekommt man die Summe.

521.

Wenn in solchen Progressionen die Zeichen + und − mit einander abwechseln, so kann die Summe auf eben dieselbe Art gefunden werden. Denn es sey

$$s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man:

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

dieses addire man zu dem obigen, da erhält man $(1+\frac{b}{c})$ $s = a$. Hieraus findet man die gesuchte Summe

$$s = \frac{a}{1+\frac{b}{c}} \text{ oder } s = \frac{ac}{c+b}.$$

522.

Es sey z. E. das erste Glied $a = \frac{3}{5}$, und der Nenner der Progression $= \frac{2}{5}$, das ist, $b = 2$ und $c = 5$, so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ etc. die Summe also gefunden: der Nenner von 1 subtrahirt, bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividiren, so bekommt man die Summe $= 1$.

Wenn aber die Zeichen + und − abwechseln, und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ etc.}$$

so wird die Summe seyn

$$\frac{a}{1+\frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

523.

Zur Uebung soll diese unendliche Progression vorgelegt seyn:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ etc.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$, und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt, bleibt $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied dividirt, giebt die Summe $= \frac{1}{3}$.

Nimmt

Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{10}$.

Nimmt man zwey Glieder $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}=\frac{33}{100}$, so fehlt noch $\frac{1}{100}$ zu $\frac{1}{3}$ ꝛc.

524.

Wenn diese unendliche Reihe gegeben ist:

$$9+\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000} \text{ ꝛc.}$$

so ist das erste Glied 9, der Nenner $\frac{1}{10}$. Also 1 weniger den Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied 9 dividirt, so wird die Summe = 10. Hier ist zu merken, daß diese Reihe durch einen Decimalbruch also vorgestellet wird: 9, 9999999 ꝛc.

Capitel 12.

Von den unendlichen Decimalbrüchen.

525.

Wir haben oben gesehen, daß bey den logarithmischen Rechnungen, anstatt der gemeinen Brüche, Decimalbrüche gebraucht werden; welches auch bey den andern Rechnungen mit großem Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an, zu zeigen, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimalbruch verwandelt werde, und wie man den Werth eines Decimalbruchs hinwiederum durch einen gemeinen Bruch ausdrücken soll.

526.

Es sey auf eine allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einen Decimalbruch verwandelt werden soll. Da nun dieser Bruch den Quotus ausdrückt, welcher entspringt, wenn man den Zähler a durch den Nenner b dividirt, so schreibe man, anstatt a, diese Form

a, 0000000, welche offenbar nichts anders anzeigt, als die Zahl a, weil keine 10tel, keine 100tel und so fort dabey sind. Diese Form theile man nun durch die Zahl b, nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobey man nur in Acht zu nehmen hat, daß das Comma, welches die Decimalbrüche von den ganzen Zahlen absondert, an seinen gehörigen Ort gesetzt werde. Dieses wollen wir nun durch nachfolgende Exempel erläutern.

Es sey erstlich der gegebene Bruch $\frac{1}{2}$, so kommt die Decimaldivision, wie folget, zu stehen:

$$\frac{2)\ 1,\ 0000000}{0,\ 5000000} = \tfrac{1}{2}.$$

Hieraus sehen wir, daß $\frac{1}{2}$ so viel sey als 0,5000000, oder, als 0,5, welches auch offenbar ist, indem dieser Decimalbruch $\frac{5}{10}$ anzeigt, welches eben so viel ist, als $\frac{1}{2}$.

527.

Es sey ferner der gegebene Bruch $\frac{1}{3}$, so hat man diesen Decimalbruch

$$\frac{3)\ 1,\ 0000000}{0,\ 3333333} \text{ ꝛc.} = \tfrac{1}{3}.$$

Hieraus sieht man, daß dieser Decimalbruch, dessen Werth $= \frac{1}{3}$ ist, nirgend abgebrochen werden kann, sondern ins Unendliche durch lauter 3 fortläuft. Also machen alle diese Brüche $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ ꝛc. ohne Ende, zusammen genommen, just so viel, als $\frac{1}{3}$, wie wir schon oben gezeigt haben.

Für $\frac{2}{3}$ findet man folgenden Decimalbruch, der auch ins Unendliche fortläuft,

$$\frac{3)\ 2,\ 0000000}{0,\ 6666666} \text{ ꝛc.} = \tfrac{2}{3},$$

welches auch aus dem vorigen klar ist, weil dieser Bruch zweymal so groß ist, als der vorige.

528.

528.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{1}{4}$, so hat man diese Decimaldivision

$$\frac{4)\ 1,0000000}{0,2500000} = \frac{1}{4}$$

also ist $\frac{1}{4}$ so viel als 0,2500000, oder als 0, 25, welches daher klar ist, daß $\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Eben so bekommt man für $\frac{3}{4}$ diesen Decimalbruch

$$\frac{4)\ 3,0000000}{0,7500000} = \frac{3}{4},$$

also ist $\frac{3}{4}$ = 0,75, das ist $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$, welcher Bruch durch 25 abgekürzt, giebt $\frac{3}{4}$.

Wollte man $\frac{5}{4}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so hätte man

$$\frac{4)\ 5,0000000}{1,2500000} = \frac{5}{4};$$

dieses ist aber $1 + \frac{25}{100}$, das ist, $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

529.

Auf solche Art wird $\frac{1}{5}$ = 0, 2: und $\frac{2}{5}$ = 0, 4; ferner $\frac{3}{5}$ = 0, 6; $\frac{4}{5}$ = 0, 8; $\frac{5}{5}$ = 1, weiter, $\frac{6}{5}$ = 1, 2 ꝛc.

Wenn der Nenner 6 ist, so finden wir $\frac{1}{6}$ = 0, 1666666 ꝛc. welches so viel ist, als 0, 666666 − 0, 5. Nun aber ist 0, 666666 = $\frac{2}{3}$ und 0, 5 = $\frac{1}{2}$, folglich ist 0, 1666666 = $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ferner findet man $\frac{2}{6}$ = 0, 3333333 ꝛc. = $\frac{1}{3}$; hingegen $\frac{3}{6}$ wird 0, 5000000 = $\frac{1}{2}$. Weiter wird $\frac{5}{6}$ = 0, 833333 = 0, 3333333 + 0, 5, das ist, $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

530.

Wenn der Nenner 7 ist, so werden die Decimalbrüche mehr verwirrt: Also für $\frac{1}{7}$ findet man 0, 142857 ꝛc. wobey zu merken, daß immer diese sechs Zahlen 142857 wieder kommen. Um nun zu zeigen, daß dieser Decimalbruch just $\frac{1}{7}$ ausmache, so verwandele man denselben

selben in eine geometrische Progression, wovon das erste Glied = $\frac{142857}{1000000}$, der Nenner aber = $\frac{1}{1000000}$; also wird die Summe = $\frac{\frac{142857}{1000000}}{1-\frac{1}{1000000}}$. Man multiplicire oben und unten mit 1000000, so wird diese Summe = $\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$.

531.

Daß der gefundene Decimalbruch just $\frac{1}{7}$ betrage, kann noch leichter folgender Gestalt gezeigt werden. Man setze für den Werth desselben den Buchstaben s, also, daß

$$s = 0,142857142857142857 \text{ rc.}$$

so wird

$$10s = 1,42857142857142857 \text{ rc.}$$
$$100s = 14,2857142857142857 \text{ rc.}$$
$$1000s = 142,857142857142857 \text{ rc.}$$
$$10000s = 1428,57142857142857 \text{ rc.}$$
$$100000s = 14285,7142857142857 \text{ rc.}$$
$$1000000s = 142857,142857142857 \text{ rc.}$$

Subtrahire $s = 0,142857142857 \text{ rc.}$

$$999999\, s = 142857.$$

Nun theile man durch 999999, so bekommt man $s = \frac{142857}{999999}$, und dieses ist der Werth des obigen Decimalbruchs $\frac{1}{7}$.

532.

Eben so verwandelt man $\frac{2}{7}$ in einen Decimalbruch 0,2857142 rc. Dieses leitet uns darauf, wie man den Werth des vorigen Decimalbruchs, den wir s gesetzt haben, leichter finden kann, weil dieser Bruch just zweymal so groß ist als der vorige, und also = 2 s; da wir nun gehabt haben:

$$100s = 14,2857142857 \text{ rc.}$$

hiervon 2 s weggenommen $2s = 0,2857142857 \text{ rc.}$

bleiben $98s = 14;$

daher wird $s = \frac{14}{98} = \frac{1}{7}$.

Ferner wird $\frac{3}{7} = 0,42857142857$ ꝛc. dieses ist also nach dem obigen Satz $= 3s$; wir haben aber gefunden:

$$10\,s = 1,42857142857 \text{ ꝛc.}$$

Subtrahire $3\,s = 0,42857142857$ ꝛc.

so wird $7\,s = 1$, folglich $s = \frac{1}{7}$.

533.

Wenn also der Nenner des gegebenen Bruchs 7 ist, so lauft der Decimalbruch ins Unendliche, und werden darinnen 6 Zahlen immer wiederholt, wovon der Grund leicht einzusehen ist, weil bey fortgesetzter Division endlich einmal so viel übrig bleiben muß, als man anfänglich gehabt. Es können aber nicht mehr verschiedene Zahlen übrig bleiben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, also müssen von der sechsten Division an wieder eben die Zahlen heraus kommen als vom Anfang. Wenn aber der Nenner so beschaffen ist, daß die Division endlich aufgeht, so fällt dieses weg.

534.

Es sey der Nenner des Bruchs 8, so werden folgende Decimalbrüche gefunden:

$\frac{1}{8} = 0,125$: $\frac{2}{8} = 0,250$: $\frac{3}{8} = 0,375$: $\frac{4}{8} = 0,500$: $\frac{5}{8} = 0,625$: $\frac{6}{8} = 0,750$: $\frac{7}{8} = 0,875$ ꝛc.

535.

Ist der Nenner 9, so findet man folgende Decimalbrüche: $\frac{1}{9} = 0,111$ ꝛc. $\frac{2}{9} = 0,222$ ꝛc. $\frac{3}{9} = 0,333$ ꝛc. Ist aber der Nenner 10, so bekommt man folgende Brüche $\frac{1}{10} = 0,100$; $\frac{2}{10} = 0,2$; $\frac{3}{10} = 0,3$, wie aus der Natur der Sache erhellet. Eben so wird $\frac{1}{100} = 0,01$; $\frac{37}{100} = 0,37$; ferner $\frac{256}{1000} = 0,256$; weiter $\frac{24}{10000} = 0,0024$; welches für sich offenbar.

536.

Es sey der Nenner des Bruchs 11, so findet man diesen Decimalbruch $\frac{1}{11} = 0,0909090$ ꝛc. Wäre nun dieser Bruch gegeben, und man wollte seinen Werth finden, so setze man denselben = s. Es wird also s = 0, 0909090: und 10 s = 00, 909090. Weiter 100 s = 9, 09090. Hiervon s subtrahirt, so wird 99 s = 9, und daher $s = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. Ferner wird $\frac{2}{11} = 0,181818$; $\frac{3}{11} = 0,272727$; $\frac{6}{11} = 0,545454$.

537.

Hier sind nun diejenigen Decimalbrüche sehr merkwürdig, da einige Zahlen immer wiederholt werden, und solcher Gestalt ins Unendliche fortgehen. Wie nun von solchen Brüchen der Werth leicht zu finden sey, soll so gleich gezeigt werden.

Es werde erstlich nur eine Zahl wiederholt, welche sey = a, so haben wir s = 0, aaaaaaa. Diesemnach wird

$$10\,s = a,\,aaaaaaa.$$
Subtrahire $s = 0,\,aaaaaaa$

so wird $9\,s = a$, folglich $s = \frac{a}{9}$.

Werden immer zwey Zahlen wiederholt, als ab, so hat man s = 0, abababa. Daher wird 100 s = ab, ababab; hiervon s subtrahirt, bleibt 99 s = ab; also $s = \frac{ab}{99}$.

Werden drey Zahlen, als abc immer wiederholt, so hat man s = 0, abcabcabc; folglich 1000 s = abc, abcabc. Hiervon das obige subtrahirt, bleibt 999 s = abc; also $s = \frac{abc}{999}$, und so weiter.

538.

So oft also ein solcher Decimalbruch vorkommt, so ist es leicht, seinen Werth anzuzeigen: also, wenn dieser gegeben wäre 0,296296; so wird sein Werth seyn $= \frac{296}{999}$. Dieser Bruch durch 37 abgekürzt, wird $= \frac{8}{27}$.

Hieraus muß nun hinwiederum der obige Decimalbruch entspringen; um dieses leichter zu zeigen, weil 27=3.9, so theile man 8 erstlich durch 9, und den Quotus ferner durch 3, wie folget:

9) 8,0000000
3) 0,8888888
0,2962962 ꝛc.

Welches der gegebene Decimalbruch ist.

539.

Um noch ein Exempel zu geben, so verwandele man diesen Bruch $\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.}$ in einen Decimalbruch, welches folgender Gestalt geschieht.

2) 1,0000000000000
3) 0,5000000000000
4) 0,1666666666666
5) 0,0416666666666
6) 0,0083333333333
7) 0,0013888888888
8) 0,0001984126984
9) 0,0000248015873
10) 0,0000027557319
0,0000002755731

Capitel 13.

Von den Interessenrechnungen.

540.

Die Interessen oder Zinsen von einem Capital pflegen in Procento ausgedrückt zu werden, indem man sagt, wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gemeiniglich wird das Geld zu 5 p. C. ausgelegt, also, daß von 100 Rthlr. jährlich 5 Rthlr. Interessen gezahlt werden. Hieraus ist nun klar und leicht, den Zins von einem jeglichen Capital zu berechnen, indem man nach der Regel detri sagt:

100 geben 5, was giebt das gegebene Capital. Es sey z. E. das Capital 860 Rthl., so findet man den jährlichen Zins

100 : 5 = 860 zu Antwort 43 Rthl.

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 100)\ 4300 \\ \hline 43 \end{array}$$

541.

Bey Berechnung dieses einfachen Interesse wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Interessen auf Interessen betrachten, da jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen, und dadurch das Capital vermehret wird, wobey denn gefragt wird: Wie hoch ein gegebenes Capital nach Verfliessung einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich grösser wird, indem zu 5 Proc. 100 Rthl. nach einem Jahr zu 105

anwachsen, so kann man daraus finden, wie groß ein jegliches Capital nach Verfliessung eines Jahres werden müsse?

Es sey das Capital $= a$, so wird solches nach einem Jahre gefunden, wenn man sagt, 100 geben 105, was giebt a; Antwort $\frac{105a}{100} = \frac{21a}{20}$, welches auch also geschrieben werden kann $\frac{21}{20}.a$, oder $a + \frac{1}{20}.a$.

542.

Wenn also zu dem gegenwärtigen Capital sein 20ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wenn man nun zu diesem wieder seinen 20sten Theil addirt, so findet man das Capital für das zweyte Jahr; und zu diesem wieder sein 20ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr, und so fort. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

543.

Es sey das Capital anjetzo 1000 Rthl., welches zu 5 P. C. angelegt ist, und die Zinsen davon jährlich wieder zum Capital geschlagen werden, weil nun die besagte Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimalbrüchen ausdrücken, nicht weiter aber, als bis auf 1000ste Theile eines Rthlr. gehen, weil kleinere Theilchen hier in keine Betrachtung kommen.

Gegen=

Gegenwärtiges Capital 1000 Rthl. wird

nach 1 Jahr	=	=	1050 Rthl.
	=	=	52, 5
nach 2 Jahren	=	=	1102, 5
			55, 125
nach 3 Jahren	=	=	1157, 625
			57, 881
nach 4 Jahren	=	=	1215, 506
			60, 775
nach 5 Jahren	=	=	1376, 281 rc.

544.

Solcher Gestalt kann man auf so viele Jahre fortgehen, als man will; wenn aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so wird diese Rechnung sehr weitläuftig und mühsam: dieselbe läßt sich aber folgendergestalt abkürzen.

Es sey das gegenwärtige Capital $= a$, und da ein Capital von 20 Rthl. nach einem Jahr 21 Rthl. beträgt, so wird das Capital a nach einem Jahr auf $\frac{21}{20}.a$ anwachsen. Ferner im folgenden Jahr auf $\frac{21^2}{20^2}.a=(\frac{21}{20})^2.a.$ Dieses ist nun das Capital nach zweyen Jahren, welches in einem Jahr wieder anwächst auf $(\frac{21}{20})^3.a$, welches das Capital nach drey Jahren seyn wird; nach vier Jahren wird nun dasselbe seyn $(\frac{21}{20})^4.a$; nach fünf Jahren $(\frac{21}{20})^5.a$; nach 100 Jahren $(\frac{21}{20})^{100}.a$, und allgemein nach n Jahren wird dasselbe seyn $(\frac{21}{20})^n.a$; woraus man nach einer jeglichen beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

545.

Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß das Interesse zu 5 Proc. gerechnet wird, und

$\frac{21}{20}$ so viel ist als $\frac{105}{100}$. Sollte nun das Interesse zu 6 Proc. gerechnet werden, so würde das Capital a nach einem Jahr anwachsen auf $\frac{106}{100}$. a; nach zwey Jahren auf $(\frac{106}{100})^2$. a; und nach n Jahren auf $(\frac{106}{100})^n$. a.

Sollte aber das Interesse nur 4 Proc. betragen, so würde das Capital a nach n Jahren anwachsen auf $(\frac{104}{100})^n$. a.

546.

Wenn nun, so wohl das Capital a, als die Anzahl der Jahre gegeben ist, so kann man diese Formel leicht auflösen, nämlich durch die Logarithmen. Denn man darf nur den Logarithmus von dieser Formel suchen, welche zu 5 Proc. ist $(\frac{21}{20})^n$. a. Da nun dieselbe ein Product ist von $(\frac{21}{20})^n$ und a, so ist ihr Logarithmus $= l(\frac{21}{20})^n + la$. Da weiter $(\frac{21}{20})^n$ eine Potestät ist, so ist $l(\frac{21}{20})^n = n\,l\frac{21}{20}$. Daher ist der Logarithmus von dem gesuchten Capital $= n.\,l\frac{21}{20} + l\,a$. Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20} = l\,21 - l\,20$.

547.

Es sey nun das Capital = 1000 Rthl., und man fragt, wie groß dasselbe nach 100 Jahren zu 5 Proc. seyn werde?

Hier ist also n = 100. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capital wird nun seyn $= 100\,l\frac{21}{20} + l\,1000$, welcher folgender Gestalt berechnet wird:

$$\begin{array}{rl} l\,21 = & 1,\ 3222193 \\ \text{subtr. } l\,20 = & 1,\ 3010300 \\ \hline l\,\frac{21}{20} = & 0,\ 0211893 \\ \text{multipl. mit } 100 & \\ \hline 100\,l\,\frac{21}{20} = & 2,\ 1189300 \\ \text{addirt } l\,1000 = & 3,\ 0000000 \\ \hline & 5,\ 1189300 \end{array}$$

dieses

dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals, und die Zahl desselben wird also aus 6 Figuren bestehen, und also heißen 131501 Rthlr.

548.

Ein Capital von 3452 Rthlr. zu 6 Proc. wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren?

Hier ist also $a=3452$ und $n=64$. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals $=64\, l\,\frac{53}{50}+l\,3452$, welches also berechnet wird:

$$
\begin{array}{rrl}
 & l\,53 = & 1,\ 7242759 \\
\text{subtr.} & l\,50 = & 1,\ 6989700 \\
\hline
 & l\,\frac{53}{50} = & 0,\ 0253059 \\
\hline
\text{mult. mit } 64; & 64\, l\,\frac{53}{50} = & 1,\ 6195776 \\
 & l\,3452 = & 3,\ 5380708 \\
\hline
 & & 5,\ 1576484
\end{array}
$$

Also das gesuchte Capital $=143763$ Rthl.

549.

Wenn die Anzahl der Jahre sehr groß ist, und weil damit der Logarithmus eines Bruchs multiplicirt werden muß, die Logarithmus in den Tabellen aber nur auf 7 Figuren berechnet worden, so könnte daraus ein merklicher Fehler entstehen. Daher muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Figuren genommen werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen: Ein Capital von einem Rthl. zu 5 pr. C. bleibt 500 Jahr lang stehen, da inzwischen die jährliche Zinse immer dazu geschlagen worden: Nun fragt sichs, wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde?

Hier ist also $a=1$ und $n=500$: also der Logarithmus des gesuchten Capitals $=500\ l\,\frac{21}{20}+l\,1$, woraus diese Rechnung entspringt:

$l\,21 = 1,3222192947339 19$

subtrahirt $l\,20 = 1,3010299956639 81$

$l\,\frac{21}{20} = 0,0211892990699 38$

mult. mit 500, giebt $10,5946495349690 00$

dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals, welches daher selbst seyn wird $= 39323200000$ Rthlr.

550.

Wenn man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Interesse schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summe $= b$ darzu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr anwachsen, wie folget. Gegenwärtig hat man a;

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a + b$

nach 2 Jahr $(\frac{21}{20})^2 a + \frac{21}{20}b + b$

nach 3 Jahr $(\frac{21}{20})^3 a + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach 4 Jahr $(\frac{21}{20})^4 a + (\frac{21}{20})^3 b + (\frac{21}{20})^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach n Jahr $(\frac{21}{20})^n a + (\frac{21}{20})^{n-1} b + (\frac{21}{20})^{n-2} b + \ldots$

$\ldots + \frac{21}{20}b + b.$

Dieses Capital besteht aus zwey Theilen, davon der erste $= (\frac{21}{20})^n a$, der andere aber aus dieser Reihe rückwärts geschrieben $b + (\frac{21}{20})b + (\frac{21}{20})^2 a + (\frac{21}{20})^3 b + \ldots$ $(\frac{21}{20})^{n-1} b$ besteht, welches eine geometrische Progression ist, deren Nenner $= \frac{21}{20}$; Die Summe davon wird nun also gefunden:

Man multiplicirt das letzte Glied $(\frac{21}{20})^{n-1} b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$, so bekommt man $(\frac{21}{20})^n b$, davon subtrahirt man das erste Glied b, so bleibt $(\frac{21}{20})^n b - b$. Dieses muß durch 1 weniger, als der Nenner ist, dividirt werden, das ist, durch $\frac{1}{20}$; daher wird die Summe der obigen Progression $= 20(\frac{21}{20})^n b - 20b$; folglich wird das gesuchte Capital seyn:

$$(\tfrac{21}{20})^n a + 20.(\tfrac{21}{20})^n b - 20b = (\tfrac{21}{20})^n.(a + 20b) - 20b.$$

551.

Um nun dieses auszurechnen, so muß man das erste Glied $(\frac{21}{20})^n a\ (a+20b)$ besonders betrachten und berechnen, welches geschieht, wenn man den Logarithmus desselben sucht, welcher ist $n\, l\, \frac{21}{20} + l\, (a+20b)$. Zu diesem sucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, so hat man das erste Glied; davon subtrahirt man $20b$, so bekommt man das gesuchte Capital.

552.

Frage: Einer hat ein Capital von 1000 Rthl. zu 5 pr. C. ausstehen, wozu er jährlich, außer den Zinsen, noch 100 Rthl. hinzu legt, wie groß wird dieses Capital nach 25 Jahren seyn?

Hier ist also $a=1000$; $b=100$; $n=25$; daher wird die Rechnung stehen, wie folget:

$$l\, \frac{21}{20} = 0,021189299$$

multiplic. mit 25 giebt

$$25\, l\, \frac{21}{20} = 0,5297324750$$
$$l\, (a+20b) = 3,4771213135$$
$$4,0068537885$$

Also ist der erste Theil 10159, 1 Rthl. davon subtrahirt $20b = 2000$, so ist das Capital nach 25 Jahren werth 8159, 1 Rthl.

553.

Da nun das Capital immer größer wird, und nach 25 Jahren auf $8159\frac{1}{10}$ Rthl. angewachsen, so kann man weiter fragen, nach wie viel Jahren dasselbe bis auf 1000000 Rthl. anwachsen werde?

Es sey n diese Anzahl von Jahren, und weil $a = 1000$, $b = 100$, so wird nach n Jahren das Capital seyn:

$(\frac{21}{20})^n$

$(\frac{21}{20})^n (3000) - 2000$, dieses muß nun 1000000 Rthl. seyn, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n - 2000 = 1000000.$$

Man addire beyderseits 2000, so bekommt man:

$$3000\,(\tfrac{21}{20})^n = 1002000.$$

Man dividire beyderseits durch 3000, so hat man $(\frac{21}{20})^n = 334$. Hiervon nehme man die Logarithmus, so hat man $n.\, l\,\frac{21}{20} = l\,334$. Hier dividirt man durch $l\,\frac{21}{20}$, so kommt $n = \frac{l\,334}{l\,\frac{21}{20}}$. Nun aber ist $l\,334 = 2{,}5237465$ und $l\,\frac{21}{20} = 0{,}0211893$; daher wird $n = \frac{2{,}5237465}{0{,}0211893}$.

Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist, 119 Jahr 1 Monat 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital anwachsen auf 1000000 Rthl.

554.

Wenn aber anstatt, daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt wird, etwas davon weggenommen wird, so man auf seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe $= b$ gesetzt wird, so wird das zu 5 p. C. angelegte Capital a folgender Gestalt fortgehen:

Gegenwärtig ist es a:

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}\,a - b$

nach 2 Jahren $(\frac{21}{20})^2 a - \frac{21}{20} b - b$

nach 3 Jahren $(\frac{21}{20})^3 a - (\frac{21}{20})^2 b - \frac{21}{20} b - b$

nach n Jahren $(\frac{21}{20})^n a - (\frac{21}{20})^{n-1} b - (\frac{21}{20})^{n-2} b \ldots$

$\ldots - (\frac{21}{20})\, b - b.$

555.

Dasselbe wird uns also in zwey Stücken vorgelegt, das erste ist $(\frac{21}{20})^n a$; davon wird subtrahirt diese geometrische Progression rückwärts geschrieben $b + \frac{21}{20} b + (\frac{21}{20})^2 b + \ldots (\frac{21}{20})^{n-1}$. Hiervon ist oben die Summe gefun-

gefunden worden $=20\left(\frac{21}{20}\right)^n b-20b$, welche von dem ersten $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ subtrahirt, das nach n Jahren gesuchte Capital giebt $\left(\frac{21}{20}\right)^n (a-20b)+20b$.

556.

Diese Formel hätte so gleich aus der vorigen geschlossen werden können. Denn da vorher jährlich b addirt wurde, so wird nun jährlich b subtrahirt. Also darf man in der vorhergehenden Formel, anstatt $+b$, nur $-b$ schreiben. Hier ist nun insonderheit zu merken, daß, wenn 20b größer ist, als a, so wird das erste Glied negativ, und also das Capital immer kleiner; welches vor sich offenbar ist, denn wenn vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahr kleiner werden, und endlich gar verschwinden, welches wir mit einem Exempel erläutern wollen.

557.

Einer hat ein Capital von 100000 Rthl. zu 5 pr. C. ausstehen; braucht alle Jahr zu seinem Unterhalt 6000 Rthl., welches mehr ist als das Interesse von 100000 Rthl., so nur 5000 Rthl. beträgt, daher das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage, nach wie viel Jahren dasselbe gänzlich verschwinden werde?

Vor diese Anzahl Jahre setze man n, und da $a=100000$ Rthl. und $b=6000$, so wird nach n Jahren das Capital seyn $=-20000\left(\frac{21}{20}\right)^n+120000$, oder $120000-20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$. Also verschwindet das Capital, wenn $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ auf 120000 anwächst, oder wenn $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n=120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $\left(\frac{21}{20}\right)^n=6$. Man nehme die Logarithmus, so kommt $n\,l\frac{21}{20}=l\,6$. Man dividire durch $l\frac{21}{20}$, so findet man $n=\frac{l\,6}{l\frac{21}{20}}=\frac{0,7781513}{0,0211893}$, oder $n=\frac{7781513}{211893}$; folglich

wird

wird $n = 36$ Jahr 8 Monat 22 Tage: und nach so vieler Zeit wird es verschwinden.

558.

Hier ist noch nöthig, zu zeigen, wie nach diesem Grund die Interessen auch vor eine kleinere Zeit als ganze Jahre berechnet werden können. Hierzu dient nun auch die oben gefundene Formel, daß ein Capital zu 5 pr. C. nach n Jahren auf $(\frac{21}{20})^n a$ anwächst, ist nun die Zeit kleiner als ein Jahr, so wird der Exponent n ein Bruch, und die Rechnung kann wie vorher durch Logarithmus gemacht werden. Sollte das Capital nach einem Tage gesucht werden, so muß man setzen $n = \frac{1}{365}$; will man es nach zwey Tagen wissen, so wird $n = \frac{2}{365}$ ꝛc.

559.

Es sey das Capital $a = 100000$ Rthl. zu 5 p. C., wie groß wird solches nach 8 Tagen seyn?

Hier ist $a = 100000$ und $n = \frac{8}{365}$; folglich wird das Capital seyn $(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}}$ 100000. Hiervon ist der Logarithmus $= l(\frac{21}{20})^{\frac{8}{365}} + l\,100000 = \frac{8}{365} l \frac{21}{20} + l\,100000$. Nun aber ist $l \frac{21}{20} = 0,0211892$.

dieser mit $\frac{8}{365}$ multipl. giebt 0,0004644
hierzu ad. l 100000, welcher ist 5,0000000

5,0004644

so erhält man den Logarithmus von dem Capital = 5, 0004644. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthl. so, daß in den ersten 8 Tagen das Interesse schon 107 Rthl. austrägt.

560.

Hierher gehören noch andere Fragen, welche darauf gehen, wenn eine Summe Geld erst nach einigen Jahren

ren verfällt, wie viel dieselbe anjetzo werth sey. Hier ist zu betrachten, daß da 20 Rthl. über ein Jahr 21 Rthl. austragen, so sind hinwiederum 21 Rthl., die nach einem Jahr zahlbar sind, anjetzo nur 20 Rthl. werth. Wenn also das nach einem Jahr verfallene Capital a gesetzt wird, so ist desselben Werth $\frac{20}{21}a$. Um also zu finden, wie viel das Capital a, so zu einer gewissen Zeit verfällt, ein Jahr früher werth ist, so muß man dasselbe multipliciren mit $\frac{20}{21}$; zwey Jahr früher wird desselben Werth seyn $(\frac{20}{21})^2 a$; drey Jahr früher ist dasselbe $(\frac{20}{21})^3 a$, und überhaupt n Jahr früher ist der Werth desselben $(\frac{20}{21})^n a$.

561.

Einer genießt auf 5 Jahr lang eine jährliche Rente von 100 Rthl., dieselbe wollte er nun jetzt für baares Geld zu 5 pr. C. verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?

für die 100 Rthl., welche verfallen,

nach 1 Jahr	bekommt	er	95, 239
nach 2 Jahren	"	"	90, 704
nach 3 Jahren	"	"	86, 385
nach 4 Jahren	"	"	82, 272
nach 5 Jahren	"	"	78, 355
Summa aller 5 Jahren	"	"	432, 955

Also kann er vor diese Rente nicht mehr fordern, als 432, 955 Rthl. oder 432 Rthl. 22 Gr. 11 Pf.

562.

Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre lang dauren, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam werden, welche aber folgender Gestalt erleichtert werden kann:

Es sey die jährliche Rente $= a$, welche jetzo schon anfängt, und n Jahre lang dauret, so wird dieselbe anjetzo werth seyn:

$$a + \tfrac{20}{21}a + (\tfrac{20}{21})^2 a + (\tfrac{20}{21})^3 a + (\tfrac{20}{21})^4 a + \ldots (\tfrac{20}{21})^n a.$$

Dieses ist nun eine geometrische Progression, deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $(\tfrac{20}{21})^{n+1} a$; Davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $(\tfrac{20}{21})^{n+1} a - a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist, mit $-\tfrac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleich viel, mit -21 multiplicirt werden: daher wird die gesuchte Summe seyn $= -21 (\tfrac{20}{21})^{n+1} a + 21 a$, das ist, $21 a - 21 (\tfrac{20}{21})^{n+1} a$, wovon das letztere Glied, so subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmus berechnet werden kann.

Ende des ersten Theils

und des dritten Abschnitts von den Verhältnissen und Proportionen.

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Euler, Leonhard, 1707-1783 / Lagrange, Joseph Louis de, 1736-1813 / Kausler, Christoph Friedrich, 1760-1825

Leonhard Eulers vollständige Anleitung zur Algebra

Bd.: 1

St. Petersburg 1771

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/GL 34-1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11341052-0
VD18 8024128X-001